

Ficha 4 — Números complexos: operações na forma algébrica

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: efetuar as operações elementares com números complexos na forma algébrica — adição, subtração, multiplicação, potenciação, divisão e inverso — usando $i^2 = -1$ e o conjugado do denominador.

Revisão rápida — as operações elementares

- **Adição e subtração:** operam-se as partes correspondentes: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$; na subtração, subtraem-se as duas partes.
- **Multiplicação:** aplica-se a propriedade distributiva e substitui-se i^2 por -1 : $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- **Potenciação:** aplicam-se produtos sucessivos, simplificando sempre cada i^2 que apareça. É útil memorizar $(1 + i)^2 = 2i$ e $(1 - i)^2 = -2i$.
- **Divisão:** multiplicam-se o numerador e o denominador pelo **conjugado do denominador**: $z/w = (z \times \bar{w}) / (w \times \bar{w}) = (z \times \bar{w}) / |w|^2$. Com este processo o denominador passa a ser um **número real**.
- **Inverso:** é um caso particular da divisão (numerador 1): $1/z = \bar{z} / |z|^2$.
- **Propriedades:** mantêm-se de $\mathbb{R}$ a comutatividade, a associatividade, a distributividade e os elementos neutros (0 na adição e 1 na multiplicação). Note-se que $1/i = -i$, pois $1/i = (1 \times (-i)) / (i \times (-i)) = -i/1$.

Exercícios

1. Adição e subtração: calcula a) $(3 + 2i) + (4 - 5i)$ · b) $(1 - i) - (3 + 2i)$

2. Multiplicação: calcula $(2 + 3i)(1 - 4i)$.

3. Quadrado de um complexo: calcula $(3 - i)^2$.

4. Potenciação: calcula a) $(1 + i)^2 \cdot b) (1 + i)^4$ (usa o resultado da alínea anterior).

5. Divisão: calcula $(3 + 2i) / (1 - i)$, apresentando o resultado na forma $a + bi$.

6. Divisão por um imaginário: calcula $(4 - i) / i$.

7. Cubo: calcula $(1 + i)^3$, aproveitando o valor de $(1 + i)^2$.

8. Conferir uma divisão: mostra que o resultado de $(1 + 5i) / 2$ é solução da equação $2z = 1 + 5i$.

9. Inverso: determina o inverso de $z = 2 + i$, usando $1/z = \bar{z} / |z|^2$.

10. Equação: resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z(1 + i) = 4$.

11. V/F — corrige as falsas: a) a adição de complexos soma as partes reais e as partes imaginárias separadamente · b) a multiplicação de números complexos é comutativa · c) $1/i = -i$ · d) para quaisquer complexos z e w tem-se $(z + w)^2 = z^2 + w^2$

12. (Python) O programa seguinte efetua três operações com dois números complexos. Executa-o para $z1 = 3 + 2j$ e $z2 = 1 - 1j$ e indica exatamente o que é impresso.

```
z = complex(input('z1 (a+bj)? '))
w = complex(input('z2 (a+bj)? '))

print('Soma:', z + w)
print('Produto:', z * w)
print('Quociente:', z / w)
```

Dica: na divisão nunca «dividas por i» diretamente — multiplica sempre pelo **conjugado do denominador**, que transforma o denominador em $|w|^2$ (um número real). E não te esqueças de que $i^2 = -1$ é substituído *a cada produto*: é aí que a maioria dos erros acontece, sobretudo no sinal.

Soluções — Operações elementares

1. a) $(3 + 2i) + (4 - 5i) = (3 + 4) + (2 - 5)i = 7 - 3i$ · b) $(1 - i) - (3 + 2i) = (1 - 3) + (-1 - 2)i = -2 - 3i$.

2. $(2 + 3i)(1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 2 - 5i + 12 = 14 - 5i$ (porque $-12i^2 = -12 \times (-1) = +12$).

3. $(3 - i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.

4. a) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ · b) $(1 + i)^4 = ((1 + i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

5. Multiplicando pelo conjugado do denominador: $(3 + 2i)(1 + i) / ((1 - i)(1 + i)) = (3 + 3i + 2i + 2i^2) / (1 - i^2) = (3 + 5i - 2) / 2 = (1 + 5i)/2 = 0,5 + 2,5i$.

6. Multiplicando numerador e denominador por $-i$: $(4 - i)(-i) / (i \times (-i)) = (-4i + i^2) / (-i^2) = (-4i - 1) / 1 = -1 - 4i$.

7. $(1 + i)^3 = (1 + i)^2 \times (1 + i) = 2i(1 + i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2 = -2 + 2i$.

8. Se $z = (1 + 5i)/2$, então $2z = 2 \times (1 + 5i)/2 = 1 + 5i$ ✓ — a igualdade verifica-se, logo $z = 0,5 + 2,5i$ é solução da equação $2z = 1 + 5i$.

9. Para $z = 2 + i$ tem-se $\bar{z} = 2 - i$ e $|z|^2 = 4 + 1 = 5$. Então $1/z = (2 - i)/5 = 2/5 - (1/5)i$ (isto é, $0,4 - 0,2i$). Verificação: $(2 + i)(2 - i)/5 = (4 + 1)/5 = 1$ ✓

10. $z = 4/(1 + i) = 4(1 - i) / ((1 + i)(1 - i)) = 4(1 - i)/2 = 2 - 2i$. Verificação: $(2 - 2i)(1 + i) = 2 + 2i - 2i - 2i^2 = 2 + 2 = 4$ ✓

11. a) **V** — é a própria definição da adição em $\mathbb{C}$ · b) **V** — mantém-se a propriedade de $\mathbb{R}$ · c) **V** — $1/i = -i$, porque $i \times (-i) = -i^2 = 1$ · d) **F** — o quadrado de uma soma inclui o dobro do produto: $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$. Só seria verdade se $zw = 0$.

12. Com $z = 3 + 2j$ e $w = 1 - 1j$ o programa imprime: **Soma: (4+1j) · Produto: (5-1j) · Quociente: (0.5+2.5j)**. Os resultados confirmam os cálculos: $3 + 1 = 4$ e $2 + (-1) = 1$, logo a soma é $4 + i$; o produto $(3 + 2i)(1 - i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 5 - i$; e o quociente é o mesmo da questão 5, $0,5 + 2,5i$. Em Python a unidade imaginária escreve-se j e o coeficiente 1 aparece explicitamente — por isso a parte imaginária 1 surge como «1j» e não como «j».

Nota: em $\mathbb{C}$ mantêm-se as propriedades das operações de $\mathbb{R}$ — a diferença está apenas em $i^2 = -1$. Nas divisões, o conjugado do denominador é o instrumento central: é ele que permite escrever o resultado na forma algébrica, com denominador real.