

Resumo — Números complexos: forma trigonométrica

12.º Ano Matemática A 2 páginas Síntese

Esta síntese reúne a forma trigonométrica dos números complexos do 12.º ano: módulo e argumento, a escrita $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, os ângulos notáveis, as simetrias, as operações com argumentos, a fórmula de De Moivre, a radiciação e as raízes n -ésimas, além das equações e dos conjuntos definidos por condições em $\mathbb{C}$.

1. Módulo e argumento

- Um complexo não nulo $z = a + bi$ tem **módulo** $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e **argumento** θ , o ângulo que o vetor Oz forma com o semieixo positivo Ox (medido no sentido positivo).
- O argumento fica determinado a menos de múltiplos de 2π ; por convenção toma-se o **argumento principal** em $[0, 2\pi[$. Todos os valores $\theta + 2k\pi$ representam o mesmo ângulo.
- Passagem entre formas:** $\cos \theta = \frac{a}{\rho}$ e $\sin \theta = \frac{b}{\rho}$, donde $a = \rho \cos \theta$ e $b = \rho \sin \theta$.
- O **quadrante do afixo** decide o argumento: a razão b/a não o determina sozinha, porque a mesma tangente aparece em quadrantes opostos.

2. Forma trigonométrica

- $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, escrevendo-se abreviadamente $z = \rho \operatorname{cis} \theta$. Aqui ρ é o módulo ($\rho \geq 0$) e θ é um argumento.
- O par (ρ, θ) identifica completamente o afixo, tal como o par (a, b) — a diferença é que agora se leem distância e direção.
- Circunferência trigonométrica:** $|\operatorname{cis} \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ para qualquer θ , logo o afixo de $\operatorname{cis} \theta$ está na circunferência de centro na origem e raio 1.
- Igualdade:** dois complexos não nulos são iguais se e só se têm o **mesmo módulo** e **argumentos que diferem por um múltiplo de 2π** .

3. Ângulos notáveis

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1

Estes valores resolvem a maioria das conversões entre a forma algébrica e a trigonométrica. Exemplos que vale a pena memorizar: $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(\pi/4)$ · $\sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis}(\pi/6)$ · $-1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis}(2\pi/3)$ · $i = \operatorname{cis}(\pi/2)$ · $-1 = \operatorname{cis}(\pi)$.

4. Simetrias

Transformação	Forma trigonométrica	Simetria no plano
conjugado $\bar{z}$	$\rho \operatorname{cis}(2\pi - \theta)$	eixo real
simétrico $-z$	$\rho \operatorname{cis}(\theta + \pi)$	origem
$-\bar{z}$	$\rho \operatorname{cis}(\pi - \theta)$	eixo imaginário

Em qualquer dos casos o **módulo não se altera**: só o argumento muda — o que confirma que estas transformações são simetrias relativamente a eixos ou pontos que passam pela origem.

5. Operações na forma trigonométrica

Operação	Regra	O que acontece
Multiplicação	$z \times w = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$	módulos multiplicam-se, argumentos somam-se
Divisão	$z / w = (\rho_1/\rho_2) \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$	módulos dividem-se, argumentos subtraem-se
Potenciação (De Moivre)	$z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$	módulo elevado a n, argumento multiplicado por n
Inverso	$1/z = (1/\rho) \operatorname{cis}(-\theta)$	módulo invertido, argumento simétrico

A **fórmula de De Moivre** é o instrumento natural para potências elevadas: $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis}(8 \times \pi/4) = 16 \operatorname{cis}(2\pi) = 16$, sem expandir produtos. O mesmo raciocínio mostra que multiplicar por $\operatorname{cis} \theta$ é, geometricamente, uma **rotação** de ângulo θ .

6. Radiciação e raízes n-ésimas

- As **n raízes n-ésimas** de $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ são $w_k = \rho^{1/n} \operatorname{cis}(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$, com $k = 0, 1, \dots, n - 1$. São exatamente **n raízes distintas** (para $z \neq 0$).
- Todas têm o **mesmo módulo** $\rho^{1/n}$ e argumentos espaçados de $2\pi/n$ — os afixos são os vértices de um **polígono regular de n lados** inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\rho^{1/n}$.
- Raízes da unidade** ($z^n = 1$): módulo 1 e argumentos $2k\pi/n$ — polígono regular inscrito na circunferência trigonométrica. Exemplos: raízes cúbicas de 8 $\rightarrow 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$; raízes cúbicas de 1 $\rightarrow 1, \operatorname{cis}(2\pi/3), \operatorname{cis}(4\pi/3)$.

7. Equações e conjuntos em $\mathbb{C}$

- Equações do tipo $z^n = c$** resolvem-se pela radiciação: escreve-se c na forma trigonométrica e aplicam-se as n raízes. Exemplo: $z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \operatorname{cis}(\pi) \rightarrow z = 4 \operatorname{cis}(\pi/2) = 4i$ ou $z = 4 \operatorname{cis}(3\pi/2) = -4i$.
- Equações do 2.º grau com $\Delta < 0$ dão raízes complexas conjugadas: $x = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Lugares geométricos:** $|z| = r$ é a circunferência de centro na origem e raio r · $|z - z_0| = r$ é a circunferência de centro no afixo de z_0 e raio r · $|z - z_0| < r$ é o interior dessa circunferência (um disco) · $|z - z_1| = |z - z_2|$ é a mediatriz do segmento de extremos nos afixos de z_1 e z_2 .

8. Erros frequentes a evitar

- Esquecer o «+ 2kπ»** na radiciação e devolver uma única raiz em vez de n .
- Determinar o argumento só pela razão b/a , ignorando o **quadrante** ($\sqrt{3} - i$ tem argumento $11\pi/6$, e não $\pi/6$).
- Trocar a operação dos argumentos: na multiplicação **somam-se**, na divisão **subtraem-se**, na potenciação **multiplica-se por n**.
- Confundir as simetrias: o conjugado usa $2\pi - \theta$ (eixo real) e $-z$ usa $\theta + \pi$ (origem).
- Escrever $\rho < 0$ — o módulo é uma distância, logo é sempre $\rho \geq 0$; o sinal vai no argumento.

Controlo rápido: para $z = -2 + 2i$ tem-se $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\theta = 3\pi/4$, logo $z = 2\sqrt{2} \operatorname{cis}(3\pi/4)$. Para multiplicar $2 \operatorname{cis}(\pi/4)$ por $3 \operatorname{cis}(\pi/6)$ obtém-se $6 \operatorname{cis}(5\pi/12)$ — módulos multiplicados, argumentos somados. E as raízes quadradas de $4 \operatorname{cis}(\pi/3)$ são $2 \operatorname{cis}(\pi/6) = \sqrt{3} + i$ e $2 \operatorname{cis}(7\pi/6) = -\sqrt{3} - i$: repara que aparecem as duas, simétricas em relação à origem, ambas com módulo 2.