

Ficha 6 — Números complexos: forma trigonométrica

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: determinar o módulo e o argumento de um número complexo, escrevê-lo na forma trigonométrica $\rho \operatorname{cis} \theta$ e converter entre a forma algébrica e a forma trigonométrica, reconhecendo as simetrias em relação aos eixos e à origem.

Revisão rápida — módulo, argumento e forma trigonométrica

- **Módulo e argumento:** um complexo não nulo $z = a + bi$ tem módulo $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e argumento θ , o ângulo que o vetor Oz forma com o semieixo positivo Ox . O argumento fica determinado **a menos de múltiplos de 2π** ; por convenção usa-se o argumento principal em $[0, 2\pi[$.
- **Passagem algébrica $\rightarrow$ trigonométrica:** $\cos \theta = a/\rho$ e $\sin \theta = b/\rho$, donde **$a = \rho \cos \theta$ e $b = \rho \sin \theta$** .
- **Forma trigonométrica:** $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, que se escreve abreviadamente **$z = \rho \operatorname{cis} \theta$** . Aqui ρ é o módulo (sempre $\rho \geq 0$) e θ é um argumento.
- **Ângulos notáveis:** $\sin \pi/6 = 1/2$ e $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ · $\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$ · $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ e $\cos \pi/3 = 1/2$. Estes valores resolvem a maioria das conversões.
- **Circunferência trigonométrica:** como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, tem-se **$|\operatorname{cis} \theta| = 1$** — o afixo de $\operatorname{cis} \theta$ está sempre na circunferência de centro na origem e raio 1.
- **Simetrias:** para $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ tem-se $\bar{z} = \rho \operatorname{cis}(2\pi - \theta)$ (simetria no eixo real) · $-z = \rho \operatorname{cis}(\theta + \pi)$ (simetria na origem) · $-\bar{z} = \rho \operatorname{cis}(\pi - \theta)$ (simetria no eixo imaginário).
- **Igualdade:** dois complexos não nulos são iguais se e só se têm o **mesmo módulo** e os argumentos **diferem por um múltiplo de 2π** .

Exercícios

1. Módulo: determina o módulo de a) $z = 3 + 3i$ · b) $z = -1 + i$ · c) $z = -2\sqrt{3} - 2i$

2. Argumento principal (em $[0, 2\pi[$): determina o argumento de a) $z = 1 + i$ · b) $z = i$ · c) $z = -1$ · d) $z = -1 - i$ · e) $z = \sqrt{3} - i$

3. Forma trigonométrica: escreve na forma $\rho \operatorname{cis} \theta$ a) $z = 1 + i$ · b) $z = -1 + \sqrt{3}i$ · c) $z = 2i$

4. Para a forma algébrica: escreve na forma $a + bi$ a) $2 \operatorname{cis}(\pi/3)$ · b) $3 \operatorname{cis}(\pi)$ · c) $\operatorname{cis}(-\pi/2)$

5. Módulo e argumento: determina o módulo e o argumento principal de $z = -2 + 2i$ e escreve z na forma trigonométrica.

6. Ângulo notável: escreve na forma algébrica $z = 3(\cos \pi/6 + i \operatorname{sen} \pi/6)$.

7. Igualdade: explica em que condições é que dois números complexos não nulos, escritos na forma trigonométrica, são iguais.

8. Simetrias: para $z = 2 \operatorname{cis}(\pi/3)$, escreve na forma trigonométrica a) $\bar{z} \cdot b$) $-z \cdot c$) $-\bar{z}$. Indica em cada caso a simetria geométrica correspondente.

9. V/F — corrige as falsas: a) na forma $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ o módulo ρ é sempre um número não negativo · b) dois complexos com o mesmo módulo e o mesmo argumento são iguais · c) o afixo de $\operatorname{cis} \theta$ pertence à circunferência de centro na origem e raio 1 · d) o argumento de um número complexo é um número real único

10. Do par (módulo, argumento): determina, na forma algébrica, o número complexo z tal que $|z| = 4$ e $\arg z = 5\pi/6$.

11. Justificação: justifica que o módulo de $\operatorname{cis} \theta$ é sempre 1 e conclui que o afixo de $\operatorname{cis} \theta$ está sobre a circunferência trigonométrica.

12. (Python) O programa seguinte converte um número complexo, dado pelo módulo e pelo argumento em radianos, para a forma algébrica. Executa-o para $\rho = 2$ e $\theta = \pi/3$ e indica exatamente o que é impresso.

```
import math

rho = float(input('rho? '))
t = float(input('theta (rad)? '))

a = rho * math.cos(t)
b = rho * math.sin(t)
print('Forma algébrica:', round(a, 3), '+', round(b, 3), 'i')
```

Dica: o argumento decide-se pelo **quadrante do afixo**, e não só pela razão b/a — o mesmo quociente aparece em quadrantes opostos. Usa os valores notáveis e, em caso de dúvida, confirma o sinal do seno e do cosseno: são eles que fixam o quadrante.

Soluções — Forma trigonométrica

1. a) $|3 + 3i| = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ · b) $|-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ · c) $|-2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$.

2. a) $z = 1 + i$ está no 1.º quadrante com $\tan \theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/4$ · b) $z = i$ tem afixo (0, 1), sobre o eixo imaginário $\rightarrow \theta = \pi/2$ · c) $z = -1$ tem afixo (-1, 0), no semieixo negativo do eixo real $\rightarrow \theta = \pi$ · d) $z = -1 - i$ está no 3.º quadrante, com $\tan \theta = 1 \rightarrow \theta = 5\pi/4$ · e) $z = \sqrt{3} - i$ está no 4.º quadrante, com $\tan \theta = -1/\sqrt{3} \rightarrow \theta = 11\pi/6$ (e não $\pi/6$, que corresponderia ao 1.º quadrante).

3. a) $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4 \rightarrow z = \sqrt{2} \operatorname{cis}(\pi/4)$ · b) $\rho = \sqrt{1 + 3} = 2$ e $\cos \theta = -1/2$, $\sin \theta = \sqrt{3}/2 \rightarrow z = 2 \operatorname{cis}(2\pi/3)$ · c) $\rho = 2$ e $\theta = \pi/2 \rightarrow z = 2 \operatorname{cis}(\pi/2)$.

4. a) $2 \operatorname{cis}(\pi/3) = 2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + \sqrt{3}i$ · b) $3 \operatorname{cis}(\pi) = 3(-1 + 0i) = -3$ · c) $\operatorname{cis}(-\pi/2) = \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2) = 0 + (-1)i = -i$ (note-se que $-\pi/2$ e $3\pi/2$ são o mesmo ângulo, a menos de 2π).

5. $\rho = |-2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$; como o afixo (-2, 2) está no 2.º quadrante e $\tan \theta = -1$, tem-se $\theta = 3\pi/4$. Logo $z = 2\sqrt{2} \operatorname{cis}(3\pi/4)$.

6. $z = 3(\sqrt{3}/2 + i \times 1/2) = (3\sqrt{3}/2) + (3/2)i$, isto é, aproximadamente 2,598 + 1,5i.

7. Dois complexos **não nulos** escritos na forma trigonométrica são iguais se e só se tiverem o **mesmo módulo** e os seus argumentos **diferirem por um múltiplo inteiro de 2π** ($\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$, com k inteiro). Isto acontece porque o mesmo ângulo pode ser representado por infinitos valores: $\pi/2$, $\pi/2 + 2\pi$ e $\pi/2 - 2\pi$ descrevem o mesmo afixo. A condição de $z \neq 0$ é necessária porque o módulo aparece a dividir no argumento — no complexo 0 não se define argumento.

8. Sendo $z = 2 \operatorname{cis}(\pi/3)$: a) $\bar{z} = 2 \operatorname{cis}(5\pi/3)$ (ou $2 \operatorname{cis}(-\pi/3)$) — simetria em relação ao **eixo real** · b) $-z = 2 \operatorname{cis}(4\pi/3)$ ($\pi/3 + \pi$) — simetria em relação à **origem** · c) $-\bar{z} = 2 \operatorname{cis}(2\pi/3)$ ($\pi - \pi/3$) — simetria em relação ao **eixo imaginário**. Em todos os casos o módulo mantém-se igual a 2.

9. a) **V** — ρ é o módulo, que é uma distância, logo $\rho \geq 0$ · b) **V** — é exatamente a condição de igualdade na forma trigonométrica · c) **V** — $|\operatorname{cis} \theta|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, logo a distância à origem é 1 · d) **F** — o argumento não é único: fica determinado a menos de múltiplos de 2π (só o argumento *principal*, escolhido num intervalo fixo, é único).

10. $z = 4(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6) = 4(-\sqrt{3}/2 + i \times 1/2) = -2\sqrt{3} + 2i$ (aproximadamente -3,464 + 2i). Confirma-se que o afixo está no 2.º quadrante e que $|z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ ✓

11. Por definição, $\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta$ e o seu módulo é $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$. Pela **fórmula fundamental da trigonometria**, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ para qualquer ângulo θ , logo $|\operatorname{cis} \theta| = \sqrt{1} = 1$, independentemente de θ . Como o módulo é a distância do afixo à origem, todos os afixos de $\operatorname{cis} \theta$ estão à distância 1 da origem — isto é, sobre a circunferência de centro na origem e raio 1 (a circunferência trigonométrica). O argumento indica a posição ao longo dessa circunferência.

12. Com $\rho = 2$ e $\theta = \pi/3$ (aproximadamente 1,0472 rad) o programa imprime: **Forma algébrica: 1.0 + 1.732 i**. Os valores correspondem a $2\cos(\pi/3) = 1$ e $2\sin(\pi/3) = \sqrt{3} \approx 1,732$, arredondados a três casas decimais; o resultado é, portanto, a forma algébrica $1 + \sqrt{3}i$ — o mesmo que se obteve na questão 4a). Sem o arredondamento, a parte imaginária seria 1.7320508075688772.

Nota: a forma trigonométrica é especialmente útil quando o argumento é um ângulo notável, porque o módulo passa a multiplicar e o argumento a somar (é o que permite multiplicar, dividir e elevar potências sem expandir produtos). O par (**módulo, argumento**) identifica completamente o afixo, tal como o par (parte real, parte imaginária).