

Resumo — Números complexos: forma algébrica

12.º Ano Matemática A 2 páginas Síntese

Esta síntese reúne a forma algébrica dos números complexos do 12.º ano: a unidade imaginária e a construção de $\mathbb{C}$, a forma $z = a + bi$, a igualdade de complexos, o conjugado e o módulo com as suas propriedades, as operações elementares e a representação no plano de Argand-Gauss.

1. A unidade imaginária e o conjunto $\mathbb{C}$

- A **unidade imaginária** é o número i que verifica $i^2 = -1$. Não é um número real: foi introduzido precisamente porque em $\mathbb{R}$ nenhum número tem quadrado negativo.
- O conjunto dos números complexos é $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. Tem-se $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: cada número real a escreve-se $a + 0i$.
- Potências de i** repetem-se em ciclo de período 4: $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$ Para calcular i^n basta o **resto da divisão de n por 4**: resto 0 $\rightarrow 1$; 1 $\rightarrow i$; 2 $\rightarrow -1$; 3 $\rightarrow -i$.
- Uma equação do 2.º grau com discriminante $\Delta < 0$ não tem raízes reais, mas tem duas **raízes complexas conjugadas**: $x = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

2. Forma algébrica: parte real, parte imaginária e igualdade

- Na forma algébrica $z = a + bi$, a é a **parte real** ($\text{Re } z$) e b é a **parte imaginária** ($\text{Im } z$). Note-se que a *parte imaginária* é b , e não bi .
- Classificação: z é **real** se $b = 0$; z é **imaginário puro** se $a = 0$ e $b \neq 0$.
- Igualdade**: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. Uma igualdade entre complexos vale por **duas equações reais** — é este o processo para determinar parâmetros.

3. Conjugado e módulo

- Conjugado**: o conjugado de $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$ (troca-se o sinal da parte imaginária). Geometricamente, o afixo de $\bar{z}$ é o **simétrico em relação ao eixo real**.
- Módulo**: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, sempre ≥ 0 . Geometricamente é a **distância do afixo à origem**; em geral, $|w - z|$ é a distância entre os afixos de w e z .
- Propriedades**: $z \times \bar{z} = |z|^2$ · $z + \bar{z} = 2a$ (real) · $z - \bar{z} = 2bi$ (imaginário puro se $b \neq 0$) · $|\bar{z}| = |z|$ · $1/z = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ($z \neq 0$).

4. Operações na forma algébrica

Operação	Processo	Exemplo
Adição / subtração	operam-se as partes correspondentes	$(3 + 2i) + (4 - 5i) = 7 - 3i$
Multiplicação	distributiva, com $i^2 = -1$	$(2 + 3i)(1 - 4i) = 14 - 5i$
Divisão	multiplicar pelo conjugado do denominador	$z/w = (z \times \bar{w})/ w ^2$
Inverso	caso particular com numerador 1	$1/z = \bar{z}/ z ^2$

5. Plano de Argand-Gauss

- Cada complexo $z = a + bi$ representa-se pelo ponto de coordenadas **(a, b)**, chamado **afixo** de z : a parte real no **eixo real** (Ox) e a imaginária no **eixo imaginário** (Oy).
- Os **reais** têm afixo no eixo real e os **imaginários puros** no eixo imaginário.
- **Simetrias**: $\bar{z}$ em relação ao eixo real · $-z$ em relação à origem · $-\bar{z}$ em relação ao eixo imaginário.
- A **soma** traduz-se pela **regra do paralelogramo**: o afixo de $z + w$ é o quarto vértice do paralelogramo sobre os afixos de z e w , porque as partes se somam separadamente.
- Condições de módulo descrevem lugares geométricos: $|z| = r$ é a circunferência de centro na origem e raio r ; $|z - z_0| = r$ é a circunferência de centro no afixo de z_0 e raio r .

6. Tabela-síntese: reconhecer depressa

Se pretendes...	Usa...
saber se é real ou imaginário puro	$b = 0$ (real) · $a = 0$ e $b \neq 0$ (imaginário puro)
calcular um módulo	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$ — nunca $ a + b $
calcular $ z ^2$ sem raízes	$z \times \bar{z}$
escrever uma divisão na forma $a + bi$	multiplicar pelo conjugado do denominador
simplificar i^n	resto da divisão de n por 4
determinar parâmetros	igualar as partes real e imaginária

7. Erros frequentes a evitar

- Esquecer que $i^2 = -1$ a meio de um produto — é a causa mais comum de erro de sinal.
- Escrever que a parte imaginária de $3 + 4i$ é $4i$ (é **4**).
- Trocar **conjugado** (troca o sinal da parte imaginária) com **simétrico** (troca o sinal de ambas: $-z = -a - bi$).
- Calcular módulos somando $|a| + |b|$ em vez de $\sqrt{a^2 + b^2}$ — com $3 + 4i$ isso daria 7 em vez de 5.
- «Dividir por i » diretamente em vez de multiplicar pelo conjugado do denominador.
- Concluir que existe ordem em $\mathbb{C}$: **não faz sentido escrever $z_1 < z_2$** para complexos não reais.

Controlo rápido: para $z = 3 + 4i$ tem-se $|z| = 5$, $\bar{z} = 3 - 4i$ e $z \times \bar{z} = 25 = |z|^2$. Na divisão $(3 + 2i)/(1 - i)$, multiplica pelo conjugado do denominador: $(3 + 2i)(1 + i)/2 = (1 + 5i)/2 = 0,5 + 2,5i$. Confirma sempre o resultado com $z \times \bar{z}$ no denominador — é o teste mais rápido de que não houve erro de sinal.