

Ficha 2 — Números complexos: forma algébrica e igualdade

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: representar números complexos na forma algébrica, identificar a parte real e a parte imaginária, reconhecer números imaginários puros e estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma algébrica.

Revisão rápida — a forma algébrica e a igualdade

- **Forma algébrica:** todo o número complexo se escreve $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O número a é a **parte real** ($\text{Re}(z)$) e b é a **parte imaginária** ($\text{Im}(z)$).
- **Atenção:** a parte imaginária de $z = 3 + 6i$ é **6** e não $6i$ — a unidade imaginária faz parte da representação, não do valor da parte imaginária.
- **Casos particulares:** z é **real** se e só se $\text{Im}(z) = 0$ (por exemplo, $5 = 5 + 0i$); z é **imaginário puro** se e só se $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$ (por exemplo, $3i$ e $-i$). Por convenção, o número **0** não se considera imaginário puro.
- **Igualdade:** dois números complexos na forma algébrica são iguais se e só se tiverem a **mesma parte real** e a **mesma parte imaginária**: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.
- **Uma igualdade, duas condições:** uma igualdade entre complexos traduz-se sempre em duas igualdades entre números reais — é isso que permite determinar parâmetros desconhecidos.
- **Não confundir:** não existe ordem em $\mathbb{C}$, mas a igualdade é uma relação bem definida — só se comparam as duas partes, uma a uma.

Exercícios

1. Partes real e imaginária: indica $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ para a) $z = 3 + 4i$ · b) $z = -2 - i$ · c) $z = 5i$ · d) $z = -7$

2. Imaginários puros: quais dos seguintes números são imaginários puros? a) $2 + 0i$ · b) $0 + 3i$ · c) $-i$ · d) 4 · e) 0

3. Igualdade: determina os números reais x e y tais que $(x - 1) + (y + 2)i = 3 + 5i$.

4. Dois parâmetros: determina a e b reais tais que $2a + (b - 1)i = 6 - 4i$.

5. V/F — corrige as falsas: a) todo o número real é um número complexo · b) $5i$ é um imaginário puro · c) se z tem parte imaginária nula, então $z \in \mathbb{R}$ · d) dois números complexos são iguais quando têm o mesmo módulo

6. Escreve na forma $a + bi$: a) $5 + i^2 \cdot b$ b) $7i + i^3 \cdot c$ c) $i^4 - 2$

7. Parâmetros: determina o valor de m para o qual $z = (m - 3) + 5i$ é um imaginário puro e o valor de n para o qual $w = 4 + (n + 1)i$ é um número real.

8. Classificação com parâmetro: considera $z = (k^2 - 9) + (k - 3)i$, com $k \in \mathbb{R}$. Determina os valores de k para os quais z é: a) um número real · b) um imaginário puro.

9. Sistema de condições: determina x e y reais tais que $(2x + y) + (x - y)i = 5 + i$.

10. Verificação: mostra que os números complexos $z = 4 + 0i$ e $w = 2 + 2i$ não são iguais, indicando qual das partes falha.

11. Justificação: explica por que razão a igualdade entre dois números complexos é equivalente a *duas* igualdades entre números reais e, com base nisso, justifica porque é que $z = 3 + bi$ só pode ser igual a $3 + 2i$ quando $b = 2$.

12. (Python) O programa seguinte compara dois números complexos na forma algébrica. Executa-o para $z1 = 3 + 4j$ e $z2 = 3 - 4j$ e indica exatamente o que é impresso.

```
z1 = complex(input('z1 (na forma a+bj)? '))
z2 = complex(input('z2 (na forma a+bj)? '))

if z1.real == z2.real and z1.imag == z2.imag:
    print('Iguais')
else:
    print('Diferentes')
```

Dica: quando a igualdade tem parâmetros, separa sempre as **duas** condições — a parte real de um lado e a parte imaginária do outro — e resolve cada uma como uma equação real. É o método que funciona em todos os exercícios 3, 4, 7, 8 e 9.

Soluções — Forma algébrica e igualdade

1. a) $z = 3 + 4i$: $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = 4$ · b) $z = -2 - i$: $\text{Re}(z) = -2$, $\text{Im}(z) = -1$ · c) $z = 5i = 0 + 5i$: $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 5$ · d) $z = -7 = -7 + 0i$: $\text{Re}(z) = -7$, $\text{Im}(z) = 0$.

2. São imaginários puros **b) $0 + 3i$** e **c) $-i$** : em ambos a parte real é 0 e a parte imaginária é diferente de 0. a) $2 + 0i$ é real, d) 4 é real e e) 0 , apesar de ter parte real nula, **não se considera imaginário puro** (é o número real 0).

3. Da igualdade resultam duas condições: $x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$; $y + 2 = 5 \rightarrow y = 3$.

4. $2a = 6 \rightarrow a = 3$; $b - 1 = -4 \rightarrow b = -3$. Verificação: $2 \times 3 + (-3 - 1)i = 6 - 4i$ ✓

5. a) **V** — todo o real a se escreve $a + 0i$ · b) **V** — $\text{Re} = 0$ e $\text{Im} = 5 \neq 0$ · c) **V** — se $\text{Im}(z) = 0$, então $z = a + 0i$ com a real, logo $z \in \mathbb{R}$ · d) **F** — a igualdade exige partes reais iguais e partes imaginárias iguais; por exemplo $3 + 4i$ e $4 + 3i$ têm partes diferentes, mas o mesmo módulo (ambos iguais a 5), sem serem iguais.

6. a) $i^2 = -1$, logo $5 + i^2 = 5 - 1 = 4$ · b) $i^3 = -i$, logo $7i + i^3 = 7i - i = 6i$ · c) $i^4 = 1$, logo $i^4 - 2 = 1 - 2 = -1$.

7. z é **imaginário puro** quando $\text{Re}(z) = 0$: $m - 3 = 0 \rightarrow m = 3$ (nesse caso $z = 5i$). w é **real** quando $\text{Im}(w) = 0$: $n + 1 = 0 \rightarrow n = -1$ (nesse caso $w = 4$). Em cada número é o coeficiente ligado ao parâmetro que tem de se anular — o outro termo é fixo e não depende dele.

8. a) z é **real** quando $k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$ (nesse caso $z = 0$). b) z é **imaginário puro** quando $k^2 - 9 = 0$ e $k - 3 \neq 0$: de $k^2 = 9$ vem $k = 3$ ou $k = -3$; excluindo $k = 3$ (que anula também a parte imaginária), resta **$k = -3$** (nesse caso $z = -6i$).

9. As duas condições são $2x + y = 5$ e $x - y = 1$. Somando membro a membro: $3x = 6 \rightarrow x = 2$; substituindo, $2 - y = 1 \rightarrow y = 1$. Verificação: $(2 \times 2 + 1) + (2 - 1)i = 5 + i$ ✓

10. $z = 4 + 0i$ tem $\text{Re}(z) = 4$ e $\text{Im}(z) = 0$; $w = 2 + 2i$ tem $\text{Re}(w) = 2$ e $\text{Im}(w) = 2$. Falham **as duas partes** ($4 \neq 2$ e $0 \neq 2$), pelo que os números não são iguais — basta que uma das partes seja diferente para que a igualdade não se verifique.

11. Dizer que $a + bi = c + di$ é dizer que o *mesmo* número complexo tem parte real a e c e parte imaginária b e d ; como a parte real e a parte imaginária de um complexo são únicas, tem de ser $a = c$ e $b = d$. Assim, $3 + bi = 3 + 2i$ obriga a comparar as duas partes: a parte real já é igual ($3 = 3$) e a parte imaginária dá $b = 2$ — **$b = 2$** é a única possibilidade. Se $b \neq 2$, a segunda igualdade falha e os complexos são diferentes.

12. Com $z_1 = 3 + 4j$ e $z_2 = 3 - 4j$, as partes reais são iguais ($3 = 3$), mas as partes imaginárias diferem ($4 \neq -4$), pelo que o programa imprime: **Diferentes**. Se ambos fossem $3 + 4j$ imprimiria *Iguais*, pois o teste compara exatamente as duas partes — a mesma condição da definição de igualdade.

Nota: distingue sempre **parte imaginária** (o número real b) de **número imaginário** — em $z = 3 + 6i$, $\text{Im}(z) = 6$. E nos exercícios com parâmetros, escreve as duas condições lado a lado antes de resolver: é o que evita perder uma delas.