

Ficha 3 — Números complexos: conjugado, módulo e representação

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: determinar o conjugado e o módulo de um número complexo na forma algébrica, aplicar as suas propriedades ($z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$) e interpretar geometricamente o conjugado e o módulo no plano complexo.

Revisão rápida — conjugado, módulo e geometria

- **Conjugado:** o conjugado de $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$ — troca-se apenas o *sinal da parte imaginária*. Exemplos: $\text{conj}(3 + 4i) = 3 - 4i$ · $\text{conj}(-2 - 5i) = -2 + 5i$ · $\text{conj}(7i) = -7i$.
- **Interpretação geométrica do conjugado:** no plano complexo, os afijos de z e de $\bar{z}$ são **simétricos em relação ao eixo real** (o eixo Ox).
- **Módulo:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, sempre um número real **não negativo**. Geometricamente é a **distância do afixo de z à origem**. Tem-se $|z| \geq 0$ e $|z| = 0$ se e só se $z = 0$.
- **Propriedade fundamental:** $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ — o produto de um complexo pelo seu conjugado é sempre um número real não negativo.
- **Outras propriedades:** $z + \bar{z} = 2a$ (número real) · $z - \bar{z} = 2bi$ (imaginário puro, se $b \neq 0$) · $|\bar{z}| = |z|$ · $\text{conj}(\text{conj}(z)) = z$ · $|z \times w| = |z| \times |w|$.
- **Identificação rápida:** z é real $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z é imaginário puro $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$; em ambos os casos, o teste decisivo continua a ser olhar para as partes.

Exercícios

1. Conjugado: determina o conjugado de a) $z = 3 + 4i$ · b) $z = -2 - 5i$ · c) $z = 7i$ · d) $z = -6$

2. Módulo: calcula a) $|3 + 4i|$ · b) $|-1 + i|$ · c) $|5i|$ · d) $|-7|$

3. Produto pelo conjugado: calcula $z \times \bar{z}$ para a) $z = 3 + 4i$ · b) $z = 1 + i$. Compara cada resultado com $|z|^2$.

4. Propriedades: mostra que, para qualquer $z = a + bi$, $z + \bar{z}$ é um número real e $z - \bar{z}$ é um número imaginário puro. Que valores se obtêm quando z é real?

5. Aplicação: para $z = 2 - 3i$, calcula $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ e $z \times \bar{z}$.

6. Módulo de um produto: para $z = 3 + 4i$ e $w = 1 + i$, calcula zw e verifica que $|zw| = |z| \times |w|$.

7. Complexo a partir do conjugado: determina z sabendo que $\bar{z} = 4 - 7i$.

8. Parâmetro: determina todos os valores reais de b para os quais $|3 + bi| = 5$.

9. V/F — corrige as falsas: a) o módulo de um número complexo nunca é negativo · b) se $|z| = 0$, então $z = 0$ · c) o conjugado do conjugado de z é o próprio z · d) $|\bar{z}| = |z|$ · e) $z \times \bar{z}$ é sempre um número imaginário puro

10. Interpretação geométrica: representa no plano complexo $z = 3 + 4i$ e o seu conjugado. Indica a distância de cada um à origem e explica que relação geométrica existe entre os dois afijos.

11. Justificação: explica por que razão o produto $z \times \bar{z}$ é sempre um número real não negativo e igual a $|z|^2$.

12. (Python) O programa seguinte calcula o conjugado e o módulo de um número complexo. Executa-o para $z = 3 + 4j$ e indica exatamente o que é impresso (atenção ao formato do módulo).

```
z = complex(input('z (na forma a+bj)? '))

print('Conjugado:', z.conjugate())
print('Módulo:', abs(z))
```

Dica: o módulo obtém-se sempre por $\sqrt{a^2 + b^2}$ — nunca por $|a| + |b|$ (com $3 + 4i$ isso daria 7 em vez de 5). E repara que o produto pelo conjugado é uma forma rápida de calcular o módulo ao quadrado sem raízes: $z \times \bar{z} = |z|^2$.

Soluções — Conjugado, módulo e representação

1. a) $\text{conj}(3 + 4i) = 3 - 4i$ · b) $\text{conj}(-2 - 5i) = -2 + 5i$ · c) $\text{conj}(7i) = \text{conj}(0 + 7i) = -7i$ · d) $\text{conj}(-6) = \text{conj}(-6 + 0i) = -6$ (um número real é igual ao seu conjugado).

2. a) $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ · b) $|-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ · c) $|5i| = \sqrt{0 + 25} = 5$ · d) $|-7| = 7$ (módulo de um real é o seu valor absoluto).

3. a) $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$, que é exatamente $|3 + 4i|^2 = 5^2 = 25$ ✓ · b) $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2 = |1 + i|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ ✓.

4. Sendo $z = a + bi$, tem-se $\bar{z} = a - bi$, logo $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$, que é real, e $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$, que é imaginário puro (desde que $b \neq 0$). Quando z é real ($b = 0$) obtém-se $z + \bar{z} = 2a$ e $z - \bar{z} = 0$.

5. Para $z = 2 - 3i$ tem-se $\bar{z} = 2 + 3i$. Então $z + \bar{z} = 4$ ($= 2 \times 2$), $z - \bar{z} = -6i$ ($= 2 \times (-3)i$) e $z \times \bar{z} = 4 + 9 = 13 = |z|^2 = (\sqrt{13})^2$ ✓.

6. $zw = (3 + 4i)(1 + i) = 3 + 3i + 4i + 4i^2 = 3 + 7i - 4 = -1 + 7i$. Então $|zw| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Por outro lado $|z| \times |w| = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ✓ — a igualdade verifica-se.

7. Como o conjugado troca o sinal da parte imaginária, $z = \text{conj}(\bar{z}) = 4 + 7i$.

8. $|3 + bi| = \sqrt{9 + b^2} = 5 \rightarrow 9 + b^2 = 25 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = 4$ ou $b = -4$. (Os dois valores são válidos: o módulo só depende de b^2 , pelo que não distingue o sinal da parte imaginária.)

9. a) **V** — é uma raiz quadrada, logo é ≥ 0 · b) **V** — $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$ só é possível com $a = b = 0$, isto é, $z = 0$ · c) **V** — trocar duas vezes o sinal da parte imaginária devolve o número inicial · d) **V** — o conjugado muda o sinal de b , mas o módulo usa b^2 , logo $|\bar{z}| = |z|$ · e) **F** — $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ é sempre um número **real** (e não negativo), nunca imaginário puro (exceto se for 0).

10. O afixo de $z = 3 + 4i$ é o ponto (3, 4) e o de $\bar{z} = 3 - 4i$ é o ponto (3, -4). A distância de cada um à origem é $\sqrt{9 + 16} = 5$ para ambos (coincidem porque têm o mesmo módulo). Geometricamente, os dois pontos são **simétricos em relação ao eixo real** (têm a mesma abcissa e ordenadas opostas) — o conjugado corresponde, no plano complexo, a uma reflexão no eixo Ox.

11. Sendo $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, o produto é $(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$, porque $i^2 = -1$ e os termos com i cancelam-se. Obtém-se assim **a soma de dois quadrados de números reais**, que é sempre ≥ 0 , e essa soma é precisamente $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$. Os termos imaginários anulam-se exatamente por causa do sinal trocado no conjugado — é isso que torna o produto sempre real.

12. Com $z = 3 + 4i$ o programa imprime: **Conjugado: (3-4j)** e **Módulo: 5.0**. O conjugado aparece entre parênteses e com o sinal da parte imaginária trocado, e o módulo surge como **5.0** — em Python o resultado de `abs()` sobre um complexo é sempre um número em vírgula flutuante, mesmo quando o valor é inteiro; é por isso que aparece «5.0» e não «5».

Nota: não confundas **conjugado** (troca o sinal da parte imaginária) com **simétrico** (troca o sinal de *ambas* as partes: $-z = -a - bi$). E lembra-te de que $|z|$ é uma distância: nunca pode ser negativo, e $|z| = 0$ só acontece no afixo da origem.