

Ficha 5 — Números complexos: plano de Argand-Gauss

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: representar números complexos no plano de Argand-Gauss e identificar complexos a partir das suas imagens geométricas, usar o módulo como distância e construir geometricamente a soma de dois complexos pela regra do paralelogramo.

Revisão rápida — o plano de Argand-Gauss

- **Plano complexo:** cada número complexo $z = a + bi$ representa-se pelo ponto de coordenadas **(a, b)** — a parte real no **eixo real** (Ox) e a parte imaginária no **eixo imaginário** (Oy). Esse ponto chama-se **afixo** de z .
- **Onde ficam:** os números **reais** têm afixo sobre o **eixo real** ($b = 0$) e os **imaginários puros** sobre o **eixo imaginário** ($a = 0$).
- **Simetrias:** o conjugado $\bar{z}$ tem o afixo **simétrico em relação ao eixo real**; o simétrico $-z$ é **simétrico em relação à origem**; o afixo de $-\bar{z}$ é a imagem de z por uma simetria em relação ao eixo imaginário.
- **Soma — regra do paralelogramo:** como se somam as partes separadamente, o afixo de $z + w$ é o **quarto vértice** do paralelogramo formado pelos afixos de z , de w e pela origem. Os segmentos $[0, z]$ e $[w, z + w]$ são paralelos e iguais.
- **Módulo como distância:** $|z|$ é a distância do afixo de z à origem; de um modo geral, $|w - z|$ é a **distância entre os afixos de w e de z** .
- **Conjuntos de pontos:** $|z| = r$ (com $r > 0$) descreve a **circunferência** de centro na origem e raio r ; $|z| < r$ é o interior dessa circunferência.

Exercícios

1. Afixos: indica as coordenadas do afixo de a) $z = 3 + 2i$ · b) $z = -1 + 3i$ · c) $z = -2 - i$ · d) $z = 4i$ · e) $z = -3$

2. Do afixo ao complexo: escreve o número complexo cujo afixo é a) $(2, -5)$ · b) $(-4, 0)$ · c) $(0, 3)$

3. Eixos: que números complexos têm afixo sobre o eixo real? E sobre o eixo imaginário? Dá um exemplo de cada caso.

4. Soma geométrica: para $z = 2 + i$ e $w = 1 + 3i$, calcula $z + w$ e indica o afixo do resultado. Representa os três afixos e explica como se obtém $z + w$ pela regra do paralelogramo.

5. Simetrias: para $z = 3 - 2i$, determina os complexos cujos afixos são as imagens de z por uma simetria: a) em relação ao eixo real · b) em relação ao eixo imaginário · c) em relação à origem.

6. Dedução: o afixo de um número complexo z está no terceiro quadrante. Em que quadrante está o afixo de $\bar{z}$? E o de $-z$?

7. Distância entre afixos: calcula a distância entre os afixos de $z = 1 + i$ e $w = 4 + 5i$.

8. Distância à origem: calcula o módulo de $z = -2 + 2i$ e interpreta o resultado como uma distância.

9. Conjunto de pontos: descreve o conjunto dos afijos dos números complexos z tais que $|z| = 3$. E se fosse $|z| \leq 3$?

10. Parâmetro: determina o valor de k para o qual o afixo de $z = (k - 1) + 2ki$ pertence ao eixo imaginário e indica esse afixo.

11. Justificação: explica por que razão a soma de dois números complexos corresponde, no plano complexo, à regra do paralelogramo.

12. (Python) O programa seguinte devolve o afixo e o módulo de um número complexo. Executa-o para $z = -2 + 2j$ e indica exatamente o que é impresso.

```
z = complex(input('z (a+bj)? '))

print('Afixo: (', z.real, ',', z.imag, ')')
print('Módulo:', round(abs(z), 2))
```

Dica: lê sempre o afixo como um par ordenado (**parte real, parte imaginária**) — trocar a ordem é o erro mais comum. E lembra-te: **módulo é distância**, por isso $|w - z|$ mede a distância entre dois afixos e nunca pode ser negativo.

Soluções — Plano de Argand-Gauss

1. a) $3 + 2i \rightarrow (3, 2)$ · b) $-1 + 3i \rightarrow (-1, 3)$ · c) $-2 - i \rightarrow (-2, -1)$ · d) $4i = 0 + 4i \rightarrow (0, 4)$ · e) $-3 = -3 + 0i \rightarrow (-3, 0)$.

2. a) afixo $(2, -5) \rightarrow 2 - 5i$ · b) afixo $(-4, 0) \rightarrow -4$ (número real, parte imaginária nula) · c) afixo $(0, 3) \rightarrow 3i$ (imaginário puro, parte real nula).

3. Sobre o **eixo real** estão os afixos dos números com parte imaginária nula — os números **reais** (por exemplo $5 = 5 + 0i$, afixo $(5, 0)$). Sobre o **eixo imaginário** estão os afixos dos números com parte real nula — os **imaginários puros** (por exemplo $3i$, afixo $(0, 3)$).

4. $z + w = (2 + 1) + (1 + 3)i = 3 + 4i$, com afixo $(3, 4)$. Geometricamente, os afixos de $z = (2, 1)$ e $w = (1, 3)$ são dois lados consecutivos de um paralelogramo com um vértice na origem; o afixo de $z + w$ é o **quarto vértice** desse paralelogramo. A regra resulta de as partes se somarem separadamente: $2 + 1 = 3$ (eixo real) e $1 + 3 = 4$ (eixo imaginário).

5. Para $z = 3 - 2i$, afixo $(3, -2)$: a) simetria em relação ao eixo real $\rightarrow$ afixo $(3, 2) \rightarrow 3 + 2i$ (é o conjugado) · b) simetria em relação ao eixo imaginário $\rightarrow$ afixo $(-3, -2) \rightarrow -3 - 2i$ · c) simetria em relação à origem $\rightarrow$ afixo $(-3, 2) \rightarrow -3 + 2i$ (é o simétrico, $-z$).

6. Se o afixo de z está no terceiro quadrante, então as duas partes são negativas ($a < 0$ e $b < 0$). O afixo de $\bar{z}$ é $(a, -b)$, com abcissa negativa e ordenada positiva, logo está no **segundo quadrante**. O afixo de $-z$ é $(-a, -b)$, com ambas as coordenadas positivas, logo está no **primeiro quadrante**.

7. A distância entre os afixos é $|w - z| = |(4 + 5i) - (1 + i)| = |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

8. $|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (aproximadamente 2,83). Este valor é a **distância do afixo $(-2, 2)$ à origem** do plano complexo.

9. $|z| = 3$ descreve o conjunto dos afixos cuja distância à origem é igual a 3 — a **circunferência de centro na origem e raio 3**. Com $|z| \leq 3$ obtém-se o **círculo** de centro na origem e raio 3, isto é, a circunferência juntamente com o seu interior (o *disco* de raio 3).

10. Sobre o eixo imaginário tem de se ter parte real nula: $k - 1 = 0 \rightarrow k = 1$. Nesse caso $z = 0 + 2i = 2i$, cujo afixo é $(0, 2)$ — efetivamente sobre o eixo imaginário (note-se que a parte imaginária, $2k = 2$, é diferente de 0, pelo que se trata mesmo de um imaginário puro).

11. Somar complexos é somar **as partes real e imaginária separadamente**: $z + w = (a + c) + (b + d)i$. No plano, isto significa que a abcissa do afixo de $z + w$ é a soma das abcissas de z e w e a ordenada é a soma das ordenadas. Ora duas translações sucessivas (primeiro segundo o vetor (a, b) , depois segundo o vetor (c, d)) conduzem ao ponto $(a + c, b + d)$, que é exatamente o quarto vértice do paralelogramo construído sobre os dois afixos. É por isso que a soma corresponde, geometricamente, à **diagonal** desse paralelogramo — a regra do paralelogramo.

12. Com $z = -2 + 2j$ o programa imprime: **Afixo: (-2.0 , 2.0)** e **Modulo: 2.83**. As coordenadas aparecem entre parênteses com os espaços introduzidos pelo *print* do Python, e os valores surgem na forma decimal porque *z.real* e *z.imag* são sempre números em vírgula flutuante. O módulo é arredondado a duas casas decimais — sem o arredondamento seria 2.8284271247461903, o valor exato de $2\sqrt{2}$.

Nota: no plano complexo, **o módulo é sempre uma distância**: $|z|$ dá a distância à origem e $|w - z|$ a distância entre dois afixos. É esta leitura que permite traduzir condições como $|z| = 3$, $|z| < 3$ ou $|z - (1 + i)| = 2$ em circunferências e discos.