

Teste de Matemática — Números complexos: forma algébrica

12.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e, nas questões de justificação e de parâmetros, explica o raciocínio que te levou à conclusão. Indica sempre as fórmulas usadas (potências de i , conjugado, módulo). Duração: 90 minutos.

Grupo I — Unidade imaginária e forma algébrica

1. (2 valores) Calcula $i^{15} + i^8$ e simplifica i^{2026} .

2. (2 valores) Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 + 6x + 13 = 0$. Indica o valor do discriminante.

3. (2 valores) Determina os números reais a e b tais que $(a + 1) + (b - 2)i = 5 - 3i$.

4. (2 valores) Para $z = -1 + 2i$, determina o conjugado, o módulo e o afixo de z .

Grupo II — Operações na forma algébrica

5. (2 valores) Calcula $(2 - i)^2$, apresentando o resultado na forma $a + bi$.

6. (2 valores) Calcula $(3 + i)/(2 - i)$ na forma $a + bi$.

7. (2 valores) Mostra que, para qualquer $z = a + bi$, o produto $z \times \bar{z}$ é um número real não negativo e igual a $|z|^2$.

Grupo III — Parâmetros, condições e programação

8. (2 valores) Determina o valor real de k para o qual $z = (k^2 - 4) + (k - 2)i$ é um número imaginário puro.

9. (2 valores) Determina o valor de $b > 0$ tal que $|1 + bi| = \sqrt{10}$.

10. (2 valores) O programa seguinte apresenta dados de um número complexo. Executa-o para $z = -1 + 2j$ e indica exatamente o que é impresso, relacionando cada linha com os resultados da questão 4.

```
z = complex(input('z (a+bj)? '))

print('Parte real:', z.real)
print('Parte imaginaria:', z.imag)
print('Conjugado:', z.conjugate())
```

Fim da prova. Total: 20 valores.

Soluções e critérios de classificação

1. (2 v) Como $15 \div 4$ tem resto 3, $i^{15} = i^3 = -i$; $8 \div 4$ tem resto 0, logo $i^8 = 1$. Assim $i^{15} + i^8 = -i + 1 = 1 - i$. Para 2026: $2026 \div 4$ tem resto 2, logo $i^{2026} = i^2 = -1$.
2. (2 v) $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 13 = 36 - 52 = -16$. Como $\Delta < 0$, não há raízes reais, mas há duas raízes complexas conjugadas: $x = (-6 \pm \sqrt{-16})/2 = (-6 \pm 4i)/2 = -3 + 2i$ e $-3 - 2i$.
Verificação: $(-3 + 2i)^2 + 6(-3 + 2i) + 13 = (5 - 12i) + (-18 + 12i) + 13 = 0$ ✓
3. (2 v) Igualando as partes correspondentes: $a + 1 = 5 \rightarrow a = 4$; $b - 2 = -3 \rightarrow b = -1$. Uma igualdade entre complexos traduz-se sempre em duas equações reais.
4. (2 v) $\bar{z} = -1 - 2i$ (troca-se o sinal da parte imaginária); $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; o afixo é o ponto $(-1, 2)$, no 2.º quadrante.
5. (2 v) $(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.
6. (2 v) Multiplicando pelo conjugado do denominador: $(3 + i)(2 + i) / ((2 - i)(2 + i)) = (6 + 3i + 2i + i^2) / (4 + 1) = (5 + 5i)/5 = 1 + i$.
7. (2 v) $(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$, porque $i^2 = -1$ e os termos com i se cancelam. A soma de dois quadrados de números reais é sempre ≥ 0 , e é exatamente $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$. O cancelamento dos termos imaginários deve-se ao sinal trocado no conjugado — é isso que torna o produto sempre real.
8. (2 v) Imaginário puro exige parte real nula e parte imaginária não nula: $k^2 - 4 = 0 \rightarrow k = 2$ ou $k = -2$; mas com $k = 2$ a parte imaginária $k - 2 = 0$, e z seria o número 0, que é real. Logo $k = -2$ (e então $z = -4i$).
9. (2 v) $|1 + bi| = \sqrt{1 + b^2} = \sqrt{10} \rightarrow 1 + b^2 = 10 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3$ ou $b = -3$. Como é pedido $b > 0$, tem-se $b = 3$ ($z = 1 + 3i$).
10. (2 v) Com $z = -1 + 2j$ o programa imprime: **Parte real: -1.0 · Parte imaginaria: 2.0 · Conjugado: (-1-2j)**. Os dois primeiros valores confirmam o afixo $(-1, 2)$ da questão 4, escritos na forma decimal porque *z.real* e *z.imag* são sempre números em vírgula flutuante; o conjugado coincide com o obtido analiticamente $(-1 - 2i)$, aqui escrito em notação de Python.

CrITÉRIOS: em cada questão a cotação reparte-se pelo *processo* (identificação do resto na divisão por 4, uso do discriminante, igualdade de partes, multiplicação pelo conjugado do denominador) e pelo *resultado*. Nas questões 7 e 8 é exigida justificação escrita; na questão 2 exigem-se as duas raízes.