

Teste de Matemática — Derivadas, limites e estudo de funções

12.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e, nas questões de justificação, explica o raciocínio que te levou à conclusão. Nas questões de estudo de funções indica sempre o **sinal** da derivada e não apenas os seus zeros. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Cálculo de derivadas

1. (2 valores) Determina a derivada de $f(x) = e^x + \ln x$, indicando o domínio em que é válida.

2. (2 valores) Determina a derivada de $h(x) = (3x - 2)^5$ e calcula o seu valor em $x = 1$.

3. (2 valores) Usando a regra do produto, determina a derivada de $g(x) = \sin x \times e^x$.

4. (2 valores) Indica a derivada de $\operatorname{tg} x$ e calcula o seu valor em $x = \pi/4$, justificando com a identidade trigonométrica adequada.

Grupo II — Limites e continuidade

5. (2 valores) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$, indicando a indeterminação e a regra utilizada.

6. (2 valores) Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$, levantando a indeterminação por fatorização.

7. (2 valores) Estuda a continuidade da função $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ no ponto $x = 3$ e, caso se trate de uma descontinuidade removível, redefine a função de modo a torná-la contínua nesse ponto.

Grupo III — Estudo de funções e otimização

8. (2 valores) Para $f(x) = x^3 - 3x^2$, determina os extremos relativos e o ponto de inflexão, indicando as suas coordenadas.

9. (2 valores) Para $f(x) = x^4$ tem-se $f''(0) = 0$. Explica por que razão isso não é suficiente para concluir que $x = 0$ é um ponto de inflexão.

10. (2 valores) Mostra, pelo teorema dos valores intermédios, que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

Soluções — Teste de Derivadas, limites e estudo de funções

1. A soma deriva-se termo a termo: $(e^x)' = e^x$ e $(\ln x)' = 1/x$. Logo $f'(x) = e^x + 1/x$. Como $\ln x$ só está definida para $x > 0$, a derivada é válida em $]0, +\infty[$.
2. Pela regra da cadeia, com a função de fora u^5 : $h'(x) = 5(3x - 2)^4 \times 3 = 15(3x - 2)^4$. Em $x = 1$: $h'(1) = 15 \times (3 - 2)^4 = 15 \times 1^4 = 15$.
3. Regra do produto, com $f = \sin x$ e $g = e^x$: $g'(x) = (\sin x)' \times e^x + \sin x \times (e^x)' = e^x(\cos x + \sin x)$.
4. $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ (equivalente a $1/\cos^2 x$). Em $x = \pi/4$ tem-se $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, logo $(\operatorname{tg} x)'|_{x=\pi/4} = 1 + 1^2 = 2$. Verificação pela outra forma: $1/\cos^2(\pi/4) = 1/(\sqrt{2}/2)^2 = 1/(1/2) = 2$ ✓
5. Substituindo diretamente obtém-se $0/0$, uma **indeterminação**. Pela **regra de L'Hôpital**: $\lim (e^x - 1)/x = \lim e^x/1 = e^0 = 1$.
6. Substituindo obtém-se $0/0$. Fatorizando o numerador como diferença de quadrados: $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ para $x \neq 2$. Logo o limite é $2 + 2 = 4$.
7. A função não está definida em $x = 3$ (numerador e denominador anulam-se), pelo que a condição « $f(3)$ existe» **falha** — a função não é contínua em 3. No entanto, para $x \neq 3$, $(x^2 - 9)/(x - 3) = (x - 3)(x + 3)/(x - 3) = x + 3$, logo $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 + 3 = 6$. O limite existe e é finito, pelo que se trata de uma **descontinuidade removível**; basta redefinir $f(3) = 6$ (mantendo $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ para $x \neq 3$) para que a função fique contínua em 3.
8. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, que se anula em $x = 0$ e $x = 2$. Como $f' > 0$ para $x < 0$, $f' < 0$ entre 0 e 2 e $f' > 0$ para $x > 2$, há um **máximo relativo em (0, 0)** e um **mínimo relativo em (2, -4)**. Quanto à segunda derivada, $f''(x) = 6x - 6$ anula-se em $x = 1$ **com mudança de sinal** (negativa antes, positiva depois), logo existe um **ponto de inflexão em (1, -2)**.
9. Para $f(x) = x^4$ tem-se $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$, pelo que $f''(0) = 0$. No entanto, $12x^2$ é **nunca negativo** para qualquer $x \neq 0$: a segunda derivada anula-se mas **não muda de sinal** em $x = 0$. Ora um ponto de inflexão exige precisamente a **mudança de sentido da concavidade**, isto é, uma mudança de sinal de f'' . Como a concavidade está voltada para cima em todo o domínio, $x = 0$ **não é ponto de inflexão** — é apenas um ponto onde a segunda derivada se anula.
10. Seja $p(x) = x^3 + x - 1$. É uma função polinomial, logo **contínua em [0, 1]**. Além disso $p(0) = -1 < 0$ e $p(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$, ou seja os valores nos extremos têm sinais contrários. Pelo **teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy)** existe pelo menos um c em $]0, 1[$ tal que $p(c) = 0$, isto é, a equação tem pelo menos uma solução nesse intervalo.

Nota: as questões 5 e 6 exigem o mesmo cuidado inicial — identificar a indeterminação antes de a levantar — e a questão 9 mostra que conhecer a **definição** (e não apenas a fórmula) é o que distingue uma resposta correta de uma resposta incompleta.