

Resumo de Trigonometria — círculo, razões e equações

11.º Ano Matemática A 2 páginas

O que este resumo cobre: tudo o que precisas para resolver exercícios de trigonometria do 11.º ano — do radiano às equações trigonométricas — em tabelas de consulta rápida.

1. Radiano e ângulos generalizados

- Radiano:** amplitude do arco com comprimento igual ao raio. $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ e $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, logo $\alpha(\text{rad}) = \alpha(^{\circ}) \times \pi/180$ e $\alpha(^{\circ}) = \alpha(\text{rad}) \times 180/\pi$.
- Ângulo orientado:** positivo no sentido anti-horário, negativo no sentido horário.
- Ângulo generalizado:** $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) representa o mesmo ângulo. A **amplitude principal** é a representação em $[0, 2\pi[$.
- Para reduzir à amplitude principal, soma ou subtrai 2π até o valor ficar em $[0, 2\pi[$ (ex.: $9\pi/2 - 4\pi = \pi/2$).

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°
Rad.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$

2. Círculo trigonométrico e redução ao 1.º quadrante

- Raio 1 e centro na origem: o ponto P tem coordenadas (**cos α** ; **sen α**) $\rightarrow$ cos = abcissa, sen = ordenada, tg = sen α / cos α .
- Sinais de (cos ; sen):** 1.º (+ ; +) · 2.º (- ; +) · 3.º (- ; -) · 4.º (+ ; -). A tg é positiva no 1.º e 3.º quadrantes.

Quadrante	Relação	sen	cos	tg
2.º	$\pi - \alpha$	sen α	-cos α	-tg α
3.º	$\pi + \alpha$	-sen α	-cos α	tg α
4.º	$2\pi - \alpha$	-sen α	cos α	-tg α
Simétrico	$-\alpha$	-sen α	cos α	-tg α

3. Razões trigonométricas e fórmula fundamental

- Fórmula fundamental:** $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \text{cos}^2\alpha$ e $\text{cos}^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$.
- Tangente:** $\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha / \text{cos } \alpha$, definida só se $\text{cos } \alpha \neq 0$ ($\alpha \neq \pi/2 + k\pi$). Dividindo a fórmula fundamental por $\text{cos}^2\alpha$: **$1 + \text{tg}^2\alpha = 1 / \text{cos}^2\alpha$** .
- A partir de uma razão:** $\text{sen } \alpha = \pm\sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha}$ e $\text{cos } \alpha = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ — o *quadrante* decide o sinal.
- Paridade:** $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$ (ímpar) · $\text{cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha$ (par) · $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha$ (ímpar).

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	não existe

4. Equações trigonométricas — soluções gerais

Nas equações elementares, α é o ângulo cujo valor trigonométrico é k ($\alpha = \arcsin k$, $\arccos k$ ou $\arctg k$). O seno e o cosseno só têm solução quando $-1 \leq k \leq 1$; a tangente tem solução para qualquer k real.

Equação	Solução geral ($k \in \mathbb{Z}$)	Porquê
$\sin x = k$	$x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi$	o seno repete-se a cada 2π e tem dois ângulos com o mesmo valor
$\cos x = k$	$x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi$	o cosseno é par: simétrico em relação a Ox
$\tan x = k$	$x = \alpha + k\pi$	a tangente repete-se a cada <i>meia</i> volta

Equação	Solução geral	Em $[0, 2\pi[$
$\sin x = 1/2$	$x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi$	$\pi/6$ e $5\pi/6$
$\cos x = \sqrt{2}/2$	$x = \pm\pi/4 + 2k\pi$	$\pi/4$ e $7\pi/4$
$\tan x = \sqrt{3}$	$x = \pi/3 + k\pi$	$\pi/3$ e $4\pi/3$
$\sin x = 0 \vee \cos x = 0$	$x = k\pi \vee x = \pi/2 + k\pi$	$0, \pi \vee \pi/2, 3\pi/2$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2k\pi$	π

5. Método passo a passo

1. Isola a razão trigonométrica ($2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = 1/2$).
2. Confirma o intervalo de validade no seno e no cosseno ($-1 \leq k \leq 1$).
3. Identifica o ângulo notável α , ou usa $\arcsin/\arccos/\arctg$ se o valor não for notável.
4. Escreve a *solução geral* com a periodicidade correta — $2k\pi$ no seno e no cosseno, $k\pi$ na tangente.
5. Se a equação tem argumento composto ($2x$, $x + \pi/4$), resolve primeiro o argumento e só depois divide/subtrai — a periodicidade também é ajustada ($2x = \dots + 2k\pi \rightarrow x = \dots + k\pi$).
6. Para resolver num intervalo, substitui valores de k na solução geral e escolhe os que pertencem ao intervalo.

Erros frequentes: esquecer a *segunda* família de soluções no seno e no cosseno (dar só $x = \pi/6$ quando também há $x = 5\pi/6$); usar $2k\pi$ na tangente em vez de $k\pi$; aplicar a fórmula com o valor fora de $[-1, 1]$ no seno ou no cosseno; e trocar o sinal do ângulo reduzido sem confirmar o quadrante.

Verificação rápida (controlo): substitui uma das soluções na equação original. Para $x = 5\pi/6$: $\sin(5\pi/6) = 1/2 \checkmark$. E conta as famílias: numa volta completa o seno assume o mesmo valor em *dois* pontos ($\pi/6$ e $5\pi/6$), o cosseno também, e a tangente apenas em um. Se obtiveste menos famílias do que isso, falta uma solução.