

Ficha 1 — Círculo trigonométrico e ângulos generalizados

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Usar o radiano, relacionar ângulos e arcos orientados e generalizados, interpretar o círculo trigonométrico e reduzir ângulos de qualquer quadrante ao 1.º quadrante.

Revisão rápida — radiano, arcos e ângulos generalizados

- Radiano:** amplitude de um arco com comprimento igual ao raio. Volta completa = 2π rad = 360° · meia volta = π rad = $180^\circ \rightarrow \alpha(\text{rad}) = \alpha(^{\circ}) \times \pi/180$.
- Ângulos notáveis:** $30^\circ = \pi/6$ · $45^\circ = \pi/4$ · $60^\circ = \pi/3$ · $90^\circ = \pi/2$ · $120^\circ = 2\pi/3$ · $135^\circ = 3\pi/4$ · $180^\circ = \pi$ · $270^\circ = 3\pi/2$ · $360^\circ = 2\pi$.
- Arco/ângulo orientado:** positivo no sentido *anti-horário* (contrário aos ponteiros do relógio), negativo no sentido horário. A amplitude pode exceder 2π ou ser negativa.
- Ângulo generalizado:** $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) representa o *mesmo* ângulo do círculo. Chama-se **amplitude principal** à representação em $[0, 2\pi[$.
- Círculo trigonométrico:** raio 1, centro na origem. O ponto P tem coordenadas **(cos α ; sen α)** $\rightarrow$ cos = abcissa, sen = ordenada, tg = sen α / cos α (ordenada do ponto de abcissa 1).
- Sinais de (cos ; sen):** 1.º (+ ; +) · 2.º (- ; +) · 3.º (- ; -) · 4.º (+ ; -). A **tangente** é positiva no 1.º e 3.º quadrantes e negativa no 2.º e 4.º.

Quadrante	Relação	sen	cos	tg
2.º — $180^\circ - \alpha$	$\pi - \alpha$	sen α	$-\cos \alpha$	$-\text{tg } \alpha$
3.º — $180^\circ + \alpha$	$\pi + \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	$-\cos \alpha$	tg α
4.º — $360^\circ - \alpha$	$2\pi - \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	cos α	$-\text{tg } \alpha$
Simétrico	$-\alpha$	$-\text{sen } \alpha$	cos α	$-\text{tg } \alpha$

Exercícios

1. Converte (usa π rad = 180°): a) 150° em radianos · b) $3\pi/4$ em graus · c) 240° em radianos · d) $7\pi/6$ em graus.

2. Calcula o valor exato: a) $\text{sen}(\pi/3)$ · b) $\cos(135^\circ)$ · c) $\text{tg}(5\pi/4)$ · d) $\text{sen}(-\pi/6)$.

3. Amplitude principal: escreve cada ângulo na forma $\alpha + 2k\pi$ com $\alpha \in [0, 2\pi[$ e indica o quadrante: a) $9\pi/2$ · b) $-\pi/3$ · c) 420° · d) $19\pi/4$.

4. Identifica o quadrante: a) $5\pi/6$ · b) 220° · c) $11\pi/6$ · d) -45° .

5. Sinais: indica o sinal de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$: a) $\alpha = 2\pi/3$ · b) $\alpha = 5\pi/4$ · c) $\alpha = 300^\circ$ · d) $\alpha = -2\pi/3$.

6. Redução ao 1.º quadrante: escreve cada um em função do ângulo do 1.º quadrante e calcula: a) $\sin(150^\circ)$ · b) $\cos(210^\circ)$ · c) $\operatorname{tg}(315^\circ)$ · d) $\sin(-120^\circ)$.

7. Coordenadas no círculo: indica as coordenadas de $P(\cos \alpha ; \sin \alpha)$: a) $\alpha = \pi/2$ · b) $\alpha = \pi$ · c) $\alpha = 3\pi/2$ · d) $\alpha = 0$. Em qual destes valores a tangente *não* existe e porquê?

8. Simplifica e apresenta o resultado apenas com $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha$: a) $\sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha) - \cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$.

9. V/F — corrige as falsas: a) 1 radiano é maior do que 1 grau · b) $\sin(\pi) = 1$ · c) $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ · d) $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$ · e) $\operatorname{tg}(\pi/2)$ existe.

10. Completa a tabela (valores exatos):

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \alpha$	---	---	---	---	---
$\cos \alpha$	---	---	---	---	---
$\operatorname{tg} \alpha$	---	---	---	---	---

11. Liga cada ângulo à sua amplitude principal e ao quadrante: a) $7\pi/2$ · b) $-5\pi/6$ · c) 900° · d) $8\pi/3 \rightarrow 1. \pi$ (180° — semi-eixo negativo de OX) · 2. $7\pi/6$ ($3.^\circ$ quadrante) · 3. $3\pi/2$ (270° — semi-eixo negativo de OY) · 4. $2\pi/3$ ($2.^\circ$ quadrante).

12. Problema: um ponto desloca-se sobre uma circunferência de raio 8 cm, percorrendo um arco de $3\pi/4$ rad. a) Qual é o comprimento do arco? ($s = r \times \theta$) b) Qual é a amplitude do arco em graus? c) Se o ponto descrever $15\pi/2$ rad, quantas voltas completas dá?

Dica: antes de calcular, reduz sempre o ângulo à sua amplitude principal (subtraindo ou somando 2π) — só depois aplicas a tabela de redução. E confirma o sinal pelo quadrante: o mesmo valor absoluto pode ter dois sinais diferentes.

Soluções — Círculo trigonométrico e ângulos generalizados

1. a) $150 \times \pi/180 = 5\pi/6$ b) $3\pi/4 = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$ c) $240 \times \pi/180 = 4\pi/3$ d) $7\pi/6 = 7 \times 30^\circ = 210^\circ$.

2. a) $\sqrt{3}/2$ b) 135° está no 2.º quadrante $\rightarrow \cos$ é negativo: $-\sqrt{2}/2$ c) $5\pi/4 = 225^\circ$ (3.º) $\rightarrow \text{tg}$ positiva: $\text{tg } 45^\circ = 1$ d) seno é ímpar: $-\sin(\pi/6) = -1/2$.

3. a) $9\pi/2 - 2 \cdot 2\pi = 9\pi/2 - 4\pi = \pi/2 \rightarrow 1^\circ$ quadrante b) $-\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3 \rightarrow 4^\circ$ c) $420^\circ - 360^\circ = 60^\circ$ ($= \pi/3$) $\rightarrow 1^\circ$ d) $19\pi/4 - 4\pi = 3\pi/4 \rightarrow 2^\circ$.

4. a) $5\pi/6 = 150^\circ \rightarrow 2^\circ$ b) $220^\circ \rightarrow 3^\circ$ c) $11\pi/6 = 330^\circ \rightarrow 4^\circ$ d) $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ \rightarrow 4^\circ$.

5. a) $2\pi/3 = 120^\circ$ (2.º): $\sin +$, $\cos -$, $\text{tg} -$ b) $5\pi/4 = 225^\circ$ (3.º): $\sin -$, $\cos -$, $\text{tg} +$ c) 300° (4.º): $\sin -$, $\cos +$, $\text{tg} -$ d) $-2\pi/3 \equiv 4\pi/3 = 240^\circ$ (3.º): $\sin -$, $\cos -$, $\text{tg} +$.

6. a) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$ b) $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$ c) $\text{tg } 315^\circ = \text{tg}(360^\circ - 45^\circ) = -\text{tg } 45^\circ = -1$ d) $\sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ = -\sqrt{3}/2$.

7. a) $\pi/2 \rightarrow (0; 1)$ b) $\pi \rightarrow (-1; 0)$ c) $3\pi/2 \rightarrow (0; -1)$ d) $0 \rightarrow (1; 0)$. A tangente não existe em $\pi/2$ e $3\pi/2$, porque aí $\cos \alpha = 0$ e $\text{tg } \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ implicaria dividir por zero.

8. a) $\sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha + (-\sin \alpha) = 0$ b) $\cos(2\pi - \alpha) - \cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha - (-\cos \alpha) = 2 \cos \alpha$ c) $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$.

9. a) **V** — $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$ b) **F** — $\sin(\pi) = 0$ (π corresponde ao ponto $(-1; 0)$) c) **V** d) **F** — o cosseno é par: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (só o seno e a tangente são ímpares) e) **F** — $\text{tg}(\pi/2)$ não existe, porque $\cos(\pi/2) = 0$.

10. **sen**: $0 \cdot 1/2 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 1$ | **cos**: $1 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot 1/2 \cdot 0$ | **tg**: $0 \cdot \sqrt{3}/3 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{não existe}$ (em $\pi/2$, pois $\cos = 0$).

11. a-**3** ($7\pi/2 - 2\pi = 3\pi/2 = 270^\circ$, semi-eixo negativo de OY) · b-**2** ($-5\pi/6 + 2\pi = 7\pi/6 = 210^\circ$, 3.º) · c-**1** ($900^\circ - 720^\circ = 180^\circ = \pi$) · d-**4** ($8\pi/3 - 2\pi = 2\pi/3 = 120^\circ$, 2.º).

12. a) $s = r \times \theta = 8 \times 3\pi/4 = 6\pi \text{ cm} \approx 18,85 \text{ cm}$ b) $3\pi/4 = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$ c) $15\pi/2 - 2\pi = 11\pi/2 = 15\pi/4 = 3 \text{ voltas completas}$ (e mais $3\pi/2$, ou seja 270°).

Nota: sempre que a resposta é um valor trigonométrico, justifica o *sinal* pelo quadrante e o *valor absoluto* pela tabela de redução — é isso que vale pontuação num teste.