

Resumo — Funções trigonométricas, modelação e triângulos

11.º Ano Matemática A 2 páginas

O que este resumo cobre: as funções seno, cosseno e tangente, as famílias $y = a + b \sin(c(x - d))$ com modelação de fenómenos periódicos, e a resolução de triângulos com as leis dos senos e dos cossenos.

1. As funções seno, cosseno e tangente

Função	Domínio	Contradomínio	Período	Zeros	Paridade
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$x = k\pi$	ímpar
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$x = \pi/2 + k\pi$	par
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π	$x = k\pi$	ímpar

- O seno e o cosseno oscilam entre -1 e 1 ; a **tangente** não tem máximo nem mínimo (contradomínio $\mathbb{R}$) e cresce em cada ramo.
- Par** significa gráfico simétrico em relação ao eixo Oy (cos); **ímpar** significa simétrico em relação à origem (sen e tg).
- O **máximo** do seno é 1 em $x = \pi/2 + 2k\pi$ e o **mínimo** é -1 em $x = 3\pi/2 + 2k\pi$. No cosseno, o máximo é 1 em $x = 2k\pi$.

2. Famílias de funções $y = a + b \sin(c(x - d))$

Parâmetro	Efeito no gráfico
a	valor médio: desloca o gráfico verticalmente (linha média $y = a$)
 b 	amplitude: metade da distância entre máximo e mínimo
c	comprime/estica na horizontal → período = $2\pi / c $
d	deslocamento horizontal

- Máximo** = $a + |b|$ e **mínimo** = $a - |b|$. A amplitude é $|b| = (\text{máximo} - \text{mínimo}) \div 2$ — metade da distância entre os extremos.
- O período vem *sempre* de c , nunca de a nem de b . Na tangente, o período é $\pi / |c|$.
- Exemplo: em $y = 3 + 2 \sin(\pi x/3)$ tem-se $a = 3$, amplitude 2 , período $2\pi \div (\pi/3) = 6$, máximo 5 e mínimo 1 .

3. Modelação de fenómenos periódicos

- Identifica o *valor médio* (o nível em torno do qual a grandeza oscila) → é o **a**.
- Calcula a amplitude = $(\text{máximo} - \text{mínimo}) \div 2$ → é o **|b|**.
- Determina o período a partir do enunciado (duração de um ciclo completo) e obtém **c = $2\pi / \text{período}$** .
- Ajusta **d** para que o modelo passe no ponto inicial dado (por exemplo, o instante em que se atinge o máximo).
- Verifica substituindo um valor conhecido do enunciado no modelo obtido.

Situações típicas: **marés** (altura da água ao longo do dia), **temperatura** ao longo de 24 horas, **roda-gigante** (altura de uma cadeira) e **ondas/som**. Em todos, o valor médio tem significado físico (nível médio da água, temperatura média) e o máximo e o mínimo são os extremos do fenómeno.

4. Resolução de triângulos

Num triângulo ABC, os lados opostos aos vértices A, B e C designam-se por a, b e c. A soma dos ângulos internos é **180°** e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Lei	Expressão	Quando usar
Dos senos	$a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C = 2R$	um lado e o seu ângulo oposto; dois ângulos e um lado
Dos cossenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	dois lados e o ângulo entre eles; os três lados
Área	$\text{Área} = (1/2) \times b \times c \times \sin A$	dois lados e o ângulo entre eles

- No **triângulo retângulo**: $\sin \theta = \text{cateto oposto} / \text{hipotenusa}$, $\cos \theta = \text{cateto adjacente} / \text{hipotenusa}$, $\tan \theta = \text{cateto oposto} / \text{cateto adjacente}$ e Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.
- A lei dos cossenos com **A = 90°** reduz-se ao teorema de Pitágoras, porque $\cos 90^\circ = 0$.
- Verificação rápida**: com a lei dos cossenos, use a igualdade $A + B + C = 180^\circ$ para confirmar os três ângulos obtidos; e confirma que o maior ângulo se opõe ao maior lado.
- Ângulos de elevação/depressão**: mede-se sempre em relação à horizontal. Para a altura de um objeto inacessível, usam-se dois ângulos em pontos diferentes e resolve-se o sistema ($h = d \tan \alpha$ e $h = (d - x) \tan \beta$).

5. Erros frequentes e controlo

Atenção: confundir o período ($2\pi/|c|$) com a amplitude ($|b|$); usar 2π em vez de π no triângulo retângulo; trocar a correspondência lado-ângulo oposto na lei dos senos; esquecer que a tangente tem período π (e não 2π); e omitir a segunda família de soluções numa equação trigonométrica.

Controlo em 3 passos: (1) desenha o triângulo e marca os dados antes de escolher a lei; (2) identifica sempre a e b, c e d no modelo antes de calcular máximos, mínimos ou períodos; (3) no fim, substitui uma das respostas no enunciado e confirma a coerência — por exemplo, verifica se o máximo obtido cai no instante indicado.