

Ficha 31 — Taxa média de variação e razão incremental

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Calcular taxas médias de variação e razões incrementais, interpretá-las como declives de retas secantes e reconhecer, por limite da razão incremental, a noção intuitiva de taxa instantânea de variação.

Revisão rápida — taxas de variação

- **Taxa média de variação (TMV)** de f no intervalo $[a, b]$: $TMV = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Geometricamente é o **declive da reta secante** que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; diz «quanto varia f , em média, por unidade de x ».
- **Razão incremental** de f em $x = a$: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, com $h \neq 0$. É a TMV no intervalo $[a, a+h]$ — mede a variação *a partir de* a .
- **Relação entre as duas**: a razão incremental é uma TMV com um dos extremos fixo (a) e o outro a h unidades de distância. Fazendo h tender para 0 aproximamo-nos do ponto.
- **Taxa instantânea (intuição)**: é o valor para que tende a razão incremental quando $h \rightarrow 0$. Geometricamente é o **declive da reta tangente** no ponto — a «velocidade» da função nesse instante.
- **Função linear**: $f(x) = mx + n$ tem TMV constante igual a m em qualquer intervalo (a secante coincide com o gráfico).
- **Erro frequente**: na razão incremental **não** se substitui $h = 0$ (daria divisão por zero) — simplifica-se primeiro a expressão e **depois** faz-se $h \rightarrow 0$.

Exercícios

1. TMV: calcula a taxa média de variação de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 3]$ e interpreta geometricamente o resultado.

2. TMV com parâmetro: determina a TMV de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 1+h]$ e simplifica a expressão.

3. Razão incremental: escreve e simplifica a razão incremental de $f(x) = x^2$ em $x = 1$.

4. Função linear: calcula a TMV de $f(x) = 2x + 1$ em $[0, 5]$ e explica porque é igual à TMV em qualquer outro intervalo.

5. TMV negativa: calcula a TMV de $f(x) = 1/x$ no intervalo $[1, 2]$ e interpreta o sinal do resultado.

6. TMV cúbica: calcula a TMV de $f(x) = x^3$ no intervalo $[2, 4]$.

7. Interpretação: a distância percorrida por um corpo (em metros) ao fim de t segundos é $d(t) = 5t^2$. Calcula a TMV no intervalo $[2, 3]$ e explica o significado físico do valor obtido.

8. Razão incremental geral: mostra que a razão incremental de $f(x) = x^2$ em $x = a$ é igual a $2a + h$.

9. Taxa instantânea (intuição): para $f(x) = x^2$, usa a razão incremental em $x = 3$ para indicar para que valor tende quando $h \rightarrow 0$.

10. Velocidade instantânea: com $d(t) = 5t^2$ (metros, segundos), simplifica a razão incremental em $t = 2$ e indica a velocidade instantânea nesse instante ($h \rightarrow 0$).

11. V/F — corrige as falsas: a) a TMV é o declive da reta secante aos dois pontos · b) a razão incremental de f em a é $[f(a + h) - f(a)]/h$, com $h \neq 0$ · c) a TMV de uma função linear é constante · d) para obter a taxa instantânea basta substituir $h = 0$ na razão incremental · e) se a TMV num intervalo é 0, então a função é constante nesse intervalo.

12. Problema: para $f(x) = x^2 + 1$: a) calcula a TMV em $[0, 2]$ · b) simplifica a razão incremental em $x = 0$ e indica a taxa instantânea nesse ponto, relacionando o resultado com o gráfico.

Dica: nas razões incrementais **desenvolve sempre $(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$** e só depois simplifica — o h do denominador desaparece e o limite fica imediato. Nunca substituas $h = 0$ antes de simplificar.

Soluções — Taxas de variação

1. $TMV = [f(3) - f(1)]/(3 - 1) = (9 - 1)/2 = 4$. É o declive da reta secante ao gráfico de x^2 nos pontos (1, 1) e (3, 9): em média, a função cresce 4 unidades por cada unidade de x .
 2. $TMV = [f(1 + h) - f(1)]/h = [(1 + h)^2 - 1]/h = (1 + 2h + h^2 - 1)/h = (2h + h^2)/h = 2 + h$.
 3. Razão incremental em $x = 1$: $[(1 + h)^2 - 1]/h = 2 + h$ ($h \neq 0$). Coincide com a TMV do exercício 2, como esperado.
 4. $TMV = [f(5) - f(0)]/(5 - 0) = (11 - 1)/5 = 2$. Numa função linear $f(x) = mx + n$ a TMV é sempre igual ao declive m : num intervalo $[a, b]$, $TMV = [(mb + n) - (ma + n)]/(b - a) = m(b - a)/(b - a) = m = 2$, independentemente do intervalo escolhido.
 5. $TMV = [f(2) - f(1)]/(2 - 1) = (1/2 - 1)/1 = -1/2$. O sinal negativo significa que, em média, a função **diminui** meia unidade por cada unidade de x ($1/x$ decresce para $x > 0$).
 6. $TMV = [f(4) - f(2)]/(4 - 2) = (64 - 8)/2 = 28$.
 7. $TMV = [d(3) - d(2)]/(3 - 2) = (5 \times 9 - 5 \times 4)/1 = (45 - 20) = 25 \text{ m/s}$. Fisicamente é a **velocidade média** no segundo intervalo: o corpo percorreu 25 metros nesse segundo. (Nota: sendo o movimento acelerado, a velocidade instantânea varia dentro do intervalo.)
 8. Razão incremental em $x = a$: $[(a + h)^2 - a^2]/h = (a^2 + 2ah + h^2 - a^2)/h = (2ah + h^2)/h = 2a + h$.
 9. Com $a = 3$: a razão incremental é $2 \times 3 + h = 6 + h$. Quando $h \rightarrow 0$, tende para **6** — é a taxa instantânea de variação (declive da tangente) de x^2 em $x = 3$.
 10. Razão incremental em $t = 2$: $[5(2 + h)^2 - 20]/h = [5(4 + 4h + h^2) - 20]/h = (20 + 20h + 5h^2 - 20)/h = (20h + 5h^2)/h = 20 + 5h$. Quando $h \rightarrow 0$ tende para **20**, logo a velocidade instantânea em $t = 2 \text{ s}$ é **20 m/s**.
 11. a) **V** b) **V** c) **V** d) **F** — $h = 0$ tornaria a expressão impossível (divisão por zero); simplifica-se primeiro e faz-se h **tender** para 0 e) **F** — contraexemplo: $f(x) = x^2$ em $[-1, 1]$ dá $TMV = 0$, mas a função não é constante.
 12. a) $TMV = [f(2) - f(0)]/(2 - 0) = (5 - 1)/2 = 2$ b) Razão incremental em $x = 0$: $[(0 + h)^2 + 1 - 1]/h = h^2/h = h$, que tende para **0** quando $h \rightarrow 0$. A taxa instantânea é nula porque $x = 0$ é o **vértice (mínimo)** da parábola: aí a reta tangente é horizontal, logo o seu declive é 0.
- Nota:** escreve sempre o intervalo entre parênteses retos nas TMV $[a, b]$ e justifica o **significado** do resultado (crescente/decrescente, velocidade média) — é o que distingue um cálculo de uma resposta completa.