

Teste de Matemática — Sucessões e progressões

11.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e, nas questões de monotonia e limite, justifica a conclusão. Indica sempre a fórmula usada (termo geral, soma, modelo de juros). Duração: 90 minutos.

Grupo I — Termos gerais, recorrências e monotonia

1. (2 valores) Para $u_n = 2n + 3$ calcula u_1 , u_5 e u_{12} . Para $v_n = n^2 - 1$ calcula v_4 .

2. (2 valores) A sucessão 4, 11, 18, 25, ... tem diferença constante. a) Escreve o termo geral. b) Calcula o termo de ordem 15.

3. (2 valores) $u_1 = 6$ e $u_{n+1} = u_n - 4$. a) Escreve os quatro primeiros termos. b) Calcula u_{10} .

4. (2 valores) Mostra que a sucessão $u_n = 2 + 1/n$ é decrescente e indica um minorante e um majorante.

Grupo II — Progressões aritméticas e geométricas

5. (2 valores) Numa PA, $u_1 = 3$ e $r = 5$. a) Calcula u_{20} . b) Calcula a soma dos 20 primeiros termos.

6. (2 valores) Numa PG, $u_1 = 5$ e $r = 2$. a) Calcula u_6 . b) Calcula a soma dos 6 primeiros termos.

7. (2 valores) Calcula a soma de todos os termos da sucessão 12, 6, 3, 1,5, Justifica porque é que a soma é finita.

Grupo III — Limites e aplicações

8. (2 valores) Indica, se existir, o limite de: a) $u_n = (3n + 2)/n$ · b) $u_n = (-1)^n/n$ · c) $u_n = n^3$.

9. (2 valores) Aplicam-se 5 000 € a 4% ao ano, com capitalização anual. Qual é o capital ao fim de 6 anos (arredonda aos cêntimos)? Que modelo (aritmético ou geométrico) traduz esta situação?

10. (2 valores) Na sucessão de Fibonacci, calcula F_9/F_8 e compara com o número de ouro ϕ . Indica ainda a propriedade que relaciona ϕ^2 com ϕ .

Fim da prova. Total: 20 valores.

Soluções e critérios de classificação

1. (2 v) $u_1 = 2 + 3 = 5$; $u_5 = 10 + 3 = 13$; $u_{12} = 24 + 3 = 27$. $v_4 = 16 - 1 = 15$.

2. (2 v) a) $r = 11 - 4 = 7 \rightarrow u_n = 4 + 7(n - 1) = 7n - 3$ b) $u_{15} = 7 \times 15 - 3 = 102$.

3. (2 v) a) 6, 2, -2, -6 b) $u_{10} = 6 - 9 \times 4 = -30$.

4. (2 v) $u_{n+1} - u_n = (2 + 1/(n+1)) - (2 + 1/n) = 1/(n+1) - 1/n = (n - n - 1)/(n(n+1)) = -1/(n(n+1)) < 0 \rightarrow$ decrescente. Como $1/n > 0$ e $1/n \leq 1$, tem-se $2 < u_n \leq 3$: um minorante é 2 e um majorante é 3 (a sucessão é limitada).

5. (2 v) a) $u_{20} = 3 + 19 \times 5 = 98$ b) $S_{20} = 20 \times (3 + 98) / 2 = 20 \times 50,5 = 1\,010$.

6. (2 v) a) $u_5 = 5 \times 2^5 = 5 \times 32 = 160$ b) $S_5 = 5 \times (1 - 2^5)/(1 - 2) = 5 \times (-63)/(-1) = 315$.

7. (2 v) É uma PG com $u_1 = 12$ e $r = 1/2$. Como $|r| < 1$, a soma dos infinitos termos converge: $S = u_1/(1 - r) = 12/(1 - 1/2) = 12/(1/2) = 24$. A soma é finita porque as parcelas diminuem de forma geométrica (cada uma é metade da anterior) e tendem para 0.

8. (2 v) a) $(3n + 2)/n = 3 + 2/n \rightarrow 3$ (convergente) b) $(-1)^n/n \rightarrow 0$ (o numerador é limitado e o denominador tende para $+\infty$) c) $n^3 \rightarrow +\infty$ (divergente).

9. (2 v) $C_5 = 5\,000 \times 1,04^5 = 5\,000 \times 1,265319 = 6\,326,60 \text{ €}$ (o juro total é 1 326,60 €). Modelo geométrico: $C_n = C_0(1 + i)^n$ é uma PG de razão 1,04.

10. (2 v) $F_9 = 34$ e $F_8 = 21$, logo $F_9/F_8 = 34/21 \approx 1,619$ — muito próximo de $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$. Propriedade: $\phi^2 = \phi + 1$ (numericamente $2,618 = 2,618$).

Crítérios: em cada questão a cotação reparte-se pelo *processo* (identificação do tipo de sucessão, escrita da fórmula e substituição) e pelo *resultado*. Nas questões 4, 7, 8 e 9 é exigida justificação escrita (sinal da diferença, convergência da soma, tipo de limite e modelo escolhido).