

Resumo — Sucessões, progressões e juros

11.º Ano

Matemática A

2 páginas

O que este resumo cobre: as sucessões e as suas formas de definição, a monotonia e a limitação, a noção intuitiva de limite com as sucessões notáveis, as progressões aritméticas e geométricas com as respetivas somas, e os modelos de juros simples e compostos.

1. Sucessões: definições e formas de dar uma sucessão

- **Sucessão:** função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, escrita (u_n) . Distingue **ordem** (a posição n) de **termo** (o valor u_n).
- **Termo geral:** expressão que dá u_n em função de n — permite calcular qualquer termo sem conhecer os anteriores. Exemplo: $u_n = 3n - 2 \rightarrow u_1 = 1, u_4 = 10, u_{10} = 28$.
- **Definição por recorrência:** dá-se o primeiro termo (ou os primeiros) e uma regra que obtém cada termo a partir do anterior. Exemplo: $u_1 = 2$ e $u_{n+1} = u_n + 5 \rightarrow 2, 7, 12, 17, 22$ e $u_{10} = 47$.
- **Recorrência multiplicativa:** $u_1 = 3$ e $u_{n+1} = 2u_n \rightarrow u_n = 3 \times 2^{(n-1)}$ ($u_5 = 48$).

2. Monotonia e limitação

- **Monotonia:** crescente se $u_{n+1} \geq u_n$, decrescente se $u_{n+1} \leq u_n$, constante se $u_{n+1} = u_n$ (para todo o n). O processo é estudar o **signal de $u_{n+1} - u_n$** .
- Exemplos: $u_n = 5 - 2n$ tem $u_{n+1} - u_n = -2 \rightarrow$ decrescente; $v_n = n/(n+1)$ tem $u_{n+1} - u_n = 1/((n+2)(n+1)) > 0 \rightarrow$ crescente.
- **Limitação:** majorada se existe M com $u_n \leq M$; minorada se existe m com $u_n \geq m$; **limitada** se for ambas. Exemplo: $u_n = 1/n$ verifica $0 < u_n \leq 1$.

3. Limite e sucessões notáveis

- **Noção intuitiva:** $u_n \rightarrow L$ quando os termos se aproximam de L à medida que n cresce. Se o limite é finito, a sucessão é **convergente**; caso contrário é **divergente**.
- Exemplos: $1/n \rightarrow 0$; $(2n + 1)/n = 2 + 1/n \rightarrow 2$; $n^2 \rightarrow +\infty$ (divergente); $(-1)^n$ oscila e **não tem limite**.
- **Fibonacci:** $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. O quociente de termos consecutivos aproxima-se do **número de ouro** ($F_{10}/F_9 = 55/34 \approx 1,6176$).
- **Número de ouro:** $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$, com a propriedade **$\phi^2 = \phi + 1$** .
- **Sucessão de Neper:** $u_n = (1 + 1/n)^n$ é crescente e limitada, com limite **$e \approx 2,71828$** ($n = 100 \rightarrow 2,7048$; $n = 1000 \rightarrow 2,7169$).
- **Paradoxos de Zenão:** uma soma com infinitas parcelas pode ter valor finito — $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$, porque a soma dos n primeiros termos é $S_n = 1 - 1/2^n$ e $1/2^n \rightarrow 0$.

4. Progressões aritméticas (PA)

- **Definição:** cada termo obtém-se somando a razão $\rightarrow r = u_{n+1} - u_n$ (constante).
- **Termo geral:** $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$. Exemplo: 3, 7, 11, 15, ... tem $r = 4$ e $u_n = 4n - 1$.
- **Soma dos n primeiros termos:** $S_n = n \times (u_1 + u_n) / 2$. Exemplo: $u_n = 4n - 1$ com $n = 30 \rightarrow u_{30} = 119$ e $S_{30} = 30 \times 61 = 1\,830$.
- **Monotonia:** crescente se $r > 0$; decrescente se $r < 0$; constante se $r = 0$.

5. Progressões geométricas (PG)

- **Definição:** cada termo obtém-se multiplicando pela razão $\rightarrow r = u_{n+1} / u_n$ (constante).
- **Termo geral:** $u_n = u_1 \times r^{(n-1)}$. Exemplo: $u_1 = 3$ e $r = 2 \rightarrow u_8 = 3 \times 2^7 = 384$.
- **Soma dos n primeiros termos:** $S_n = u_1 \times (1 - r^n) / (1 - r)$, com $r \neq 1$. Exemplo: 2, 6, 18, ... ($r = 3$) $\rightarrow S_6 = 728$.
- **Soma dos infinitos termos ($|r| < 1$):** $S = u_1 / (1 - r)$. Exemplo: $8 + 4 + 2 + 1 + \dots = 8 / (1/2) = 16$.
- **Monotonia** (com $u_1 > 0$): crescente se $r > 1$; decrescente se $0 < r < 1$; alternada se $r < 0$.

6. Juros simples e compostos

Regime	Modelo	Expressão	Exemplo
Juros simples	aritmético (PA)	$C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$	1 000 € a 5% por 3 anos $\rightarrow$ 1 150 €
Juros compostos	geométrico (PG)	$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$	1 000 € a 5% por 3 anos $\rightarrow$ 1 157,63 €

- Nos **simples** o juro incide sempre sobre o capital *inicial*; nos **compostos** incide sobre o capital *acumulado* (juros sobre juros) — por isso cresce mais depressa.
- **Problemas de tempo:** «ao fim de quanto tempo» resolve-se com uma inequação, $C_0(1 + i)^n \geq$ objetivo, e a resposta é o **primeiro período inteiro** que cumpre a condição (ex.: duplicar 1 000 € a 2% exige 36 anos, porque em 35 anos só se atingem 1 999,89 €).

7. Erros frequentes e controlo

Atenção: confundir ordem com termo; calcular a razão de uma PG por diferença (é sempre um *quociente*); aplicar a fórmula da soma infinita quando $|r| \geq 1$ (a soma diverge); escrever $C_n = C_0(1 + ni)^n$ (misturar os dois regimes); e dar como resposta um número de períodos não inteiro em problemas de tempo.

Controlo em 3 passos: (1) testa se as diferenças ou os quocientes entre termos consecutivos são constantes — só uma das duas o será; (2) calcula o termo geral e verifica-o substituindo $n = 1$ e $n = 2$; (3) em problemas de juros, identifica explicitamente se o modelo é linear (simples) ou exponencial (compostos) antes de substituir.