

Ficha 18 — Sucessões

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Definir sucessões por termo geral e por recorrência, estudar a monotonia e a limitação, compreender a noção intuitiva de limite e reconhecer sucessões notáveis (Fibonacci, número de ouro e sucessão de Neper).

Revisão rápida — sucessões, monotonia e limite

- **Sucessão:** função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$; escreve-se (u_n) e cada u_n é o *termo de ordem n*. *Ordem* é a posição (n); *termo* é o valor (u_n).
- **Termo geral:** expressão que dá u_n em função de n (ex.: $u_n = 3n - 2$) — permite calcular qualquer termo sem conhecer os anteriores.
- **Definição por recorrência:** dá-se o primeiro termo (ou os primeiros) e uma regra que obtém cada termo a partir do anterior (ex.: $u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n + 5$).
- **Monotonia:** *crescente* se $u_{n+1} \geq u_n$, *decrescente* se $u_{n+1} \leq u_n$ (para todo o n); se for sempre igual, é *constante*.
- **Limitação:** *majorada* se existe M com $u_n \leq M$; *minorada* se existe m com $u_n \geq m$; *limitada* se for ambas.
- **Limite (noção intuitiva):** $u_n \rightarrow L$ quando os termos se aproximam de L à medida que n cresce. Se existe limite finito a sucessão é *convergente*; caso contrário é *divergente*.
- **Sucessões notáveis:** Fibonacci — $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; **número de ouro** — $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$, com $\phi^2 = \phi + 1$; **Neper** — $u_n = (1 + 1/n)^n \rightarrow e \approx 2,71828$.

Exercícios

1. Termos: para $u_n = 3n - 2$ calcula u_1 , u_4 e u_{10} . Para $v_n = n^2 + 1$ calcula v_3 .

2. Termo geral: a sucessão 5, 8, 11, 14, ... tem diferença constante 3. a) Escreve o termo geral u_n . b) Calcula o termo de ordem 20.

3. Recorrência: $u_1 = 2$ e $u_{n+1} = u_n + 5$. a) Escreve os cinco primeiros termos. b) Calcula u_{10} .

4. Recorrência multiplicativa: $u_1 = 3$ e $u_{n+1} = 2u_n$. a) Calcula u_5 . b) Escreve a expressão do termo geral.

5. Monotonia: estuda a monotonia de a) $u_n = 5 - 2n$ · b) $v_n = n/(n + 1)$ (compara u_{n+1} com u_n).

6. Limitação: mostra que $u_n = 1/n$ é minorada por 0 e majorada por 1.

7. Limites: indica, se existir, $\lim u_n$: a) $u_n = 1/n$ · b) $u_n = (2n + 1)/n$ · c) $u_n = n^2$ · d) $u_n = (-1)^n$.

8. Fibonacci: escreve os dez primeiros termos. Calcula F_6/F_5 e F_{10}/F_9 e compara com o número de ouro ($\phi \approx 1,618$).

9. Número de ouro: considerando $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, verifica que $\phi^2 = \phi + 1$.

10. Sucessão de Neper: calcula $u_n = (1 + 1/n)^n$ para $n = 1, 10, 100$ e 1000 e compara com $e \approx 2,71828$. Que conclusão tiras?

n	1	10	100	1000
$(1 + 1/n)^n$	2	---	---	---

11. Zenão: considera a soma $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$. Explica porque é que a soma total é 1, e não infinita, e liga a tua resposta à noção de limite.

12. (Python) Escreve um programa que gere a sucessão de Collatz a partir de 27 e conte quantos passos são necessários até chegar a 1.

```
n = 27
passos = 0
while n != 1:
    n = n // 2 if n % 2 == 0 else 3 * n + 1
    passos += 1
print(passos)
```

Dica: para estudar a monotonia, calcula a diferença $u_{n+1} - u_n$ e verifica o seu sinal para todo o n — se for sempre positiva, a sucessão é crescente. Em problemas com «aproxima-se de», estás a falar de limite: não basta dar um valor, é preciso mostrar a tendência.

Soluções — Sucessões

1. $u_1 = 3 - 2 = 1$; $u_4 = 12 - 2 = 10$; $u_{10} = 30 - 2 = 28$. $v_3 = 9 + 1 = 10$.

2. a) $u_1 = 5$ e a diferença é 3 $\rightarrow u_n = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$ b) $u_{20} = 3 \times 20 + 2 = 62$.

3. a) **2, 7, 12, 17, 22** (cada termo soma 5 ao anterior) b) $u_{10} = 2 + 9 \times 5 = 47$.

4. a) 3, 6, 12, 24 $\rightarrow u_5 = 48$ b) cada termo é o anterior multiplicado por 2: $u_n = 3 \times 2^{(n-1)}$.

5. a) $u_{n+1} - u_n = (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) = -2 < 0 \rightarrow$ **decrescente** (sucessão aritmética de razão negativa) b) $v_{n+1} - v_n = (n+1)/(n+2) - n/(n+1) = ((n+1)^2 - n(n+2)) / ((n+2)(n+1)) = 1 / ((n+2)(n+1)) > 0 \rightarrow$ **crecente**.

6. Para todo o $n \in \mathbb{N}$: $n \geq 1 \rightarrow 0 < 1/n \leq 1$ (o primeiro termo é 1 e os seguintes são menores, mas nunca nulos). Logo 0 é minorante e 1 é majorante: a sucessão é **limitada** ($0 \leq u_n \leq 1$).

7. a) $1/n \rightarrow 0$ (convergente) b) $(2n + 1)/n = 2 + 1/n \rightarrow 2$ (convergente) c) $n^2 \rightarrow +\infty$ (divergente, cresce sem limite) d) $(-1)^n = -1, 1, -1, 1, \dots$ **não tem limite** (os termos oscilam; sucessão divergente).

8. **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55**. $F_6/F_5 = 8/5 = 1,6$ e $F_{10}/F_9 = 55/34 \approx 1,6176$ — o quociente de termos consecutivos aproxima-se de $\phi \approx 1,618$.

9. $\phi^2 = ((1 + \sqrt{5})/2)^2 = (1 + 2\sqrt{5} + 5)/4 = (6 + 2\sqrt{5})/4 = (3 + \sqrt{5})/2$. E $\phi + 1 = (1 + \sqrt{5})/2 + 1 = (3 + \sqrt{5})/2$. Logo **$\phi^2 = \phi + 1$** ✓ (numericamente $2,618 = 2,618$).

10. $n = 1 \rightarrow 2$; $n = 10 \rightarrow \approx 2,5937$; $n = 100 \rightarrow \approx 2,7048$; $n = 1000 \rightarrow \approx 2,7169$. Os valores crescem aproximando-se de **$e \approx 2,71828$** : a sucessão é crescente e limitada, com limite e (número de Neper).

11. A soma dos n primeiros termos é $S_n = 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n = 1 - 1/2^n$. Como $1/2^n \rightarrow 0$, então $S_n \rightarrow 1$: acrescentam-se parcelas cada vez menores, e a soma converge para 1 (nunca o excedendo). É a resposta ao paradoxo de Zenão — o número de etapas é infinito, mas a *soma dos tempos* tem limite finito.

12. O programa imprime **111**: a sucessão $27 \rightarrow 82 \rightarrow 41 \rightarrow 124 \rightarrow \dots \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ tem 112 termos (27 incluído) e exige **111 passos** para atingir 1. O máximo alcançado é 9 232, o que mostra que a sucessão não é monótona, embora pareça convergir sempre para o ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Nota: distingue sempre *ordem* (posição n) de *termo* (valor u_n), e justifica a monotonia pelo sinal de $u_{n+1} - u_n$ — é o processo que vale pontuação.