

Ficha 5 — Resolução de triângulos

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos a triângulos retângulos e não retângulos, escolher a lei adequada a cada situação e resolver problemas de medição indireta.

Revisão rápida — as duas leis

- **Triângulo retângulo:** $\text{sen } \theta = \text{cateto oposto} / \text{hipotenusa}$ · $\text{cos } \theta = \text{cateto adjacente} / \text{hipotenusa}$ · $\text{tg } \theta = \text{cateto oposto} / \text{cateto adjacente}$, com Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.
- **Lei dos senos** (qualquer triângulo, lados numéricos opostos aos ângulos): $a / \text{sen } A = b / \text{sen } B = c / \text{sen } C = 2R$ (R = raio da circunferência circunscrita).
- **Lei dos cossenos** (qualquer triângulo): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ — com $A = 90^\circ$ dá exatamente o teorema de Pitágoras ($\cos 90^\circ = 0$).
- **Quando usar cada uma:** lei dos *senos* quando há um lado e o seu ângulo oposto; lei dos *cossenos* quando há dois lados e o ângulo entre eles, ou os três lados.
- **Ângulos:** $A + B + C = 180^\circ$. Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo (e vice-versa).
- **Área de um triângulo:** $\text{Área} = (1/2) \times b \times c \times \text{sen } A$ (dois lados e o ângulo entre eles).

Dados conhecidos	Lei a usar
Um lado e o ângulo oposto	senos
Dois lados e o ângulo entre eles	cossenos
Os três lados	cossenos
Dois ângulos e um lado	senos (após achar o 3.º ângulo)

Exercícios

1. Triângulo retângulo — determina o valor exato pedido: a) catetos 3 e 4 → hipotenusa · b) hipotenusa 10 e um cateto 6 → o outro cateto · c) cateto oposto 5 e hipotenusa 10 → a amplitude do ângulo · d) catetos iguais a 7 → hipotenusa e os ângulos agudos.

2. Lei dos senos: num triângulo ABC, $A = 40^\circ$, $B = 60^\circ$ e $a = 8$ cm. Determina C, b e c (2 casas decimais).

3. Lei dos senos: num triângulo ABC, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ e $a = 10$ cm. Determina C e o lado b (valor exato).

4. Lei dos cossenos: num triângulo ABC, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm e $A = 60^\circ$. Determina o lado a (valor exato).

5. Lei dos cossenos (três lados): num triângulo de lados $a = 5$ cm, $b = 6$ cm e $c = 7$ cm, determina a amplitude dos três ângulos (1 casa decimal). Classifica o triângulo quanto aos ângulos.

6. Qual das leis usarias? Justifica em cada caso: a) conheces dois lados e o ângulo entre eles · b) conheces os três lados · c) conheces um lado e os dois ângulos adjacentes · d) conheces um lado, o ângulo oposto e mais um lado.

7. V/F — corrige as falsas: a) A lei dos senos aplica-se a qualquer triângulo · b) Num triângulo retângulo, $\sin \theta = \text{cateto oposto} / \text{hipotenusa}$ · c) A lei dos cossenos com $A = 90^\circ$ dá o teorema de Pitágoras · d) Se $a^2 = b^2 + c^2$, o triângulo é obtusângulo · e) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 360° .

8. Altitude de um edifício: de um ponto A do solo vê-se o topo do edifício sob um ângulo de elevação de 30° . Avançando 20 m em direção ao edifício, num ponto B, o ângulo de elevação passa a ser 60° . Qual é a altura do edifício? (valor exato)

9. Rampa: uma rampa tem 12 m de comprimento e vence um desnível de 3 m. a) Qual é a amplitude do ângulo que a rampa faz com o solo? b) Qual é o comprimento da projeção horizontal da rampa (2 casas decimais)?

10. Completa a tabela (triângulos retângulos — indica os valores em falta, verificando Pitágoras):

Cateto b	Cateto c	Hipotenusa a	Verificação
3	4	---	---
6	---	10	---
5	12	---	---

11. Navegação: um barco parte de um porto, navega 10 km e muda de rumo, passando a direção das duas etapas a formar um ângulo de 120° . Navega depois mais 8 km. A que distância do porto se encontra? (valor exato e 1 casa decimal)

12. Área e lados: num triângulo ABC, $a = 6$ cm, $b = 8$ cm e $C = 30^\circ$. a) Calcula a área do triângulo · b) Determina o lado c (2 casas decimais) · c) Calcula a amplitude do ângulo A (1 casa decimal).

Dica: desenha sempre o triângulo e marca os dados *antes* de escolher a lei. E lembra-te: a lei dos cossenos resolve os casos «dois lados + ângulo entre eles» e «três lados»; todos os outros vão pela lei dos senos.

Soluções — Resolução de triângulos

1. a) $a = \sqrt{9 + 16} = 5$ b) $c = \sqrt{100 - 36} = 8$ c) $\sin \theta = 5/10 = 1/2 \rightarrow \theta = 30^\circ$ d) $a = \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$ e os dois ângulos agudos são 45° cada (catetos iguais $\Rightarrow$ triângulo retângulo isósceles).
2. $C = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$. Pela lei dos senos: $b = a \sin B / \sin A = 8 \times \sin 60^\circ / \sin 40^\circ = 8 \times 0,8660 / 0,6428 \approx 10,78 \text{ cm}$; $c = 8 \times \sin 80^\circ / \sin 40^\circ \approx 12,26 \text{ cm}$.
3. $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. $b = a \sin B / \sin A = 10 \times \sin 45^\circ / \sin 30^\circ = 10 \times (\sqrt{2}/2) \div (1/2) = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ ($\approx 14,14 \text{ cm}$).
4. $a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ = 25 + 49 - 70 \times (1/2) = 39 \rightarrow a = \sqrt{39} \text{ cm}$ ($\approx 6,24 \text{ cm}$).
5. $a = 5$ (oposto a A), $b = 6$, $c = 7$. $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc) = (36 + 49 - 25) / 84 = 60/84 = 5/7 \rightarrow A \approx 44,4^\circ$. $\cos B = (25 + 49 - 36) / 70 = 38/70 \rightarrow B \approx 57,1^\circ$. $\cos C = (25 + 36 - 49) / 60 = 12/60 = 0,2 \rightarrow C \approx 78,5^\circ$. Soma $\approx 180^\circ$ ✓ e o maior ângulo é agudo ($78,5^\circ < 90^\circ$) $\rightarrow$ **acutângulo**.
6. a) **cossenos** ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$) b) **cossenos** (para obter cada ângulo) c) **senos** — acha-se primeiro o terceiro ângulo ($180^\circ -$ soma) d) **cossenos primeiro** (dois lados + o ângulo entre eles; a lei dos senos só depois, para os ângulos em falta).
7. a) **V** b) **V** c) **V** — $\cos 90^\circ = 0$ anula o último termo d) **F** — a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ define um triângulo **retângulo**; num obtusângulo seria $a^2 > b^2 + c^2$ e) **F** — a soma é 180° .
8. Seja h a altura e d a distância de A à base. Então $h = d \operatorname{tg} 30^\circ$ e $h = (d - 20) \operatorname{tg} 60^\circ$. Igualando: $d/\sqrt{3} = \sqrt{3}(d - 20) \rightarrow d = 3d - 60 \rightarrow 2d = 60 \rightarrow d = 30 \text{ m}$. Logo $h = 30 \operatorname{tg} 30^\circ = 30/\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ m}$ ($\approx 17,32 \text{ m}$).
9. a) $\sin \theta = 3/12 = 1/4 \rightarrow \theta \approx 14,48^\circ$ b) projeção $= \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{135} \approx 11,62 \text{ m}$.
10. 3 e $4 \rightarrow a = 5$, pois $9 + 16 = 25$ | 6 e $10 \rightarrow c = 8$, pois $36 + 64 = 100$ | 5 e $12 \rightarrow a = 13$, pois $25 + 144 = 169$. (São os ternos pitagóricos 3-4-5, 6-8-10 e 5-12-13.)
11. O ângulo entre os dois percursos é 120° , logo $d^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 120^\circ = 100 + 64 - 160 \times (-1/2) = 164 + 80 = 244 \rightarrow d = \sqrt{244} = 2\sqrt{61} \text{ km} \approx 15,6 \text{ km}$.
12. a) O ângulo C é formado pelos lados **a** e **b** $\rightarrow$ Área $= (1/2) \times a \times b \times \sin C = (1/2) \times 6 \times 8 \times (1/2) = 12 \text{ cm}^2$ b) $c^2 = 36 + 64 - 96 \times \cos 30^\circ = 100 - 83,14 \approx 16,86 \rightarrow c \approx 4,11 \text{ cm}$ c) $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc) = (64 + 16,86 - 36) / (2 \times 8 \times 4,11) = 44,86 / 65,76 \approx 0,6828 \rightarrow A \approx 46,9^\circ$.

Nota: identifica sempre *qual* o lado oposto a *qual* ângulo antes de substituir na lei — trocar a correspondência é o erro que estraga o exercício todo, mesmo com a fórmula certa.