

Ficha 2 — Razões trigonométricas e fórmula fundamental

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Aplicar as razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico, deduzir e usar a fórmula fundamental da Trigonometria e calcular $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ conhecendo um deles e o quadrante.

Revisão rápida — razões trigonométricas e identidades

- No círculo trigonométrico (raio 1), o ponto P tem coordenadas $(\cos \alpha; \sin \alpha)$: $\sin \alpha = \text{ordenada}$ · $\cos \alpha = \text{abscissa}$ · $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ (definida apenas se $\cos \alpha \neq 0$, isto é $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
- Fórmula fundamental da Trigonometria: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — resulta do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo de hipotenusa 1. Consequências: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.
- Outra identidade útil: dividindo a fórmula fundamental por $\cos^2 \alpha$ obtém-se $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 / \cos^2 \alpha$.
- Determinar um a partir do outro: $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ e $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ — o sinal é escolhido pelo quadrante onde α se encontra.
- Sinais de $(\cos; \sin)$: 1.º (+; +) · 2.º (–; +) · 3.º (–; –) · 4.º (+; –). A tangente é positiva no 1.º e 3.º quadrantes.
- Paridade: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ (ímpar) · $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (par) · $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ (ímpar).

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	não existe

Exercícios

1. Define $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ como coordenadas no círculo trigonométrico. Porque é que a tangente *não* está definida em $\alpha = \pi/2$?

2. Usa $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para calcular o valor pedido (indica o sinal pelo quadrante): a) $\cos \alpha = 3/5$ e $\alpha \in 1.^\circ \rightarrow \sin \alpha$ · b) $\cos \alpha = -4/5$ e $\alpha \in 2.^\circ \rightarrow \sin \alpha$ · c) $\sin \alpha = 1/2$ e $\alpha \in 1.^\circ \rightarrow \cos \alpha$ · d) $\sin \alpha = -0,6$ e $\alpha \in 3.^\circ \rightarrow \cos \alpha$.

3. Verifica a identidade para o ângulo indicado: a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ com $\alpha = \pi/3$ · b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ com $\alpha = 5\pi/6$ (atenção ao sinal).

4. Calcula $\operatorname{tg} \alpha$ em cada caso: a) $\operatorname{sen} \alpha = 1/2$ e $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ · b) $\operatorname{sen} \alpha = -3/5$ e $\cos \alpha = 4/5$ · c) $\cos \alpha = -1/2$ e $\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{3}/2$ · d) $\cos \alpha = 3/5$ e $\alpha \in 1.^\circ$ (calcula primeiro $\operatorname{sen} \alpha$).

5. Determina o quadrante de α : a) $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$ · b) $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$ · c) $\cos \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$ · d) $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

6. Simplifica (usa a fórmula fundamental): a) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1$ · b) $(1 - \cos^2 \alpha) / \operatorname{sen} \alpha$, com $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$ · c) $\cos^2 \alpha \times (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$, com $\cos \alpha \neq 0$ · d) $\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

7. Paridade: calcula o valor exato: a) $\operatorname{sen}(-\pi/6)$ · b) $\cos(-\pi/4)$ · c) $\operatorname{tg}(-\pi/3)$ · d) $\operatorname{sen}(-\alpha) + \operatorname{sen} \alpha$.

8. Sabendo que $\cos \alpha = -1/2$ e $\alpha \in 2.^\circ$ quadrante, determina: a) $\operatorname{sen} \alpha$ · b) $\operatorname{tg} \alpha$ · c) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ · d) $\cos(\pi + \alpha)$.

9. V/F — corrige as falsas: a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para qualquer ângulo α · b) $\tan(\pi/2)$ existe e é igual a 0 · c) se $\sin \alpha > 0$, então α está no 1.º quadrante · d) $\tan \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$ · e) $1 + \tan^2 \alpha = 1 / \cos^2 \alpha$.

10. Completa a tabela e confirma a fórmula fundamental em cada coluna:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$	$\tan \alpha$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	---	---	---	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	---	---	---	---
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	---	---	---	---

11. Calcula o valor exato: a) $\sin(2\pi/3) \times \cos(\pi/6)$ · b) $\tan(5\pi/6)$ · c) $\sin^2(\pi/4) + \cos^2(\pi/4)$ · d) $\sin(7\pi/6) \times \tan(\pi/4)$.

12. Problemas: a) O ponto $P(\cos \alpha ; \sin \alpha)$ tem abcissa $-1/2$ e encontra-se no 2.º quadrante — determina a ordenada e $\tan \alpha$. b) Uma rampa tem inclinação α com $\tan \alpha = \sqrt{3}/3$ ($0 < \alpha < \pi/2$). Qual é a amplitude de α em graus e em radianos? c) Se $\tan \alpha = 1$ e $\alpha \in 3.º$ quadrante, qual é o valor exato de $\sin \alpha$ e de $\cos \alpha$?

Dica: quando conheces uma razão e o quadrante, escreve sempre $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ e só depois decides o sinal — decidir o sinal «de cabeça» sem olhar para o quadrante é o erro mais frequente em teste.

Soluções — Razões trigonométricas e fórmula fundamental

1. No círculo de raio 1, $\sin \alpha$ é a **ordenada** de P e $\cos \alpha$ a sua **abscissa**; $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Em $\alpha = \pi/2$ o ponto é (0 ; 1), logo $\cos(\pi/2) = 0$ e a tangente exigiria uma divisão por zero — **não está definida** (o mesmo acontece em $\pi/2 + k\pi$).

2. a) $\sin \alpha = +\sqrt{1 - 9/25} = \sqrt{16/25} = \mathbf{4/5}$ ($1^\circ \rightarrow$ positivo) b) $\cos$ é negativo no 2° mas o *seno* é positivo: $\sin \alpha = +\sqrt{1 - 16/25} = \mathbf{3/5}$ c) $\cos \alpha = +\sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3/4} = \mathbf{\sqrt{3}/2}$ d) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,36} = -\sqrt{0,64} = \mathbf{-0,8}$ (= $-4/5$, negativo no 3° quadrante).

3. a) $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2 \rightarrow 3/4 + 1/4 = \mathbf{1}$ ✓ b) $5\pi/6 = 150^\circ$ (2°): $\sin = 1/2$ e $\cos = -\sqrt{3}/2 \rightarrow (1/2)^2 + (-\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = \mathbf{1}$ ✓ — o quadrado elimina o sinal.

4. a) $\tan \alpha = (1/2) \div (\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} = \mathbf{\sqrt{3}/3}$ b) $\tan \alpha = (-3/5) \div (4/5) = \mathbf{-3/4}$ (α no 4°) c) $\tan \alpha = (-\sqrt{3}/2) \div (-1/2) = \mathbf{\sqrt{3}}$ ($3^\circ \rightarrow$ positiva) d) $\sin \alpha = 4/5 \rightarrow \tan \alpha = (4/5) \div (3/5) = \mathbf{4/3}$.

5. a) 4° (seno negativo, cosseno positivo) b) 2° ($\tan < 0$ exige $\cos < 0$, com $\sin > 0$) c) 3° ($\tan > 0$ exige $\cos$ e $\sin$ com o mesmo sinal) d) 3° ($\sin < 0$ e $\cos < 0$).

6. a) $1 - 1 = \mathbf{0}$ b) $(\sin^2 \alpha) / \sin \alpha = \mathbf{\sin \alpha}$ c) $\cos^2 \alpha \times (1/\cos^2 \alpha) = \mathbf{1}$ d) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \mathbf{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

7. a) $-\sin(\pi/6) = \mathbf{-1/2}$ b) $\cos$ é par: $\mathbf{\sqrt{2}/2}$ c) $-\tan(\pi/3) = \mathbf{-\sqrt{3}}$ d) $-\sin \alpha + \sin \alpha = \mathbf{0}$.

8. a) $\sin \alpha = +\sqrt{1 - 1/4} = \mathbf{\sqrt{3}/2}$ (positivo no 2°) b) $\tan \alpha = (\sqrt{3}/2) \div (-1/2) = \mathbf{-\sqrt{3}}$ c) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \mathbf{\sqrt{3}/2}$ d) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = \mathbf{1/2}$.

9. a) **V** — é a fórmula fundamental b) **F** — $\tan(\pi/2)$ não existe ($\cos(\pi/2) = 0$) c) **F** — $\sin \alpha > 0$ também no 2° quadrante d) **F** — é o inverso: $\tan \alpha = \mathbf{\sin \alpha / \cos \alpha}$ e) **V**.

10. $\pi/6$: $1/4 \cdot 3/4 \cdot \mathbf{1}$ | $\pi/4$: $1/2 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{1}$, $\tan = \mathbf{1}$ | $\pi/3$: $3/4 \cdot 1/4 \cdot \mathbf{1}$, $\tan = \mathbf{\sqrt{3}}$. A coluna da soma dá sempre **1** — é a fórmula fundamental a confirmar-se.

11. a) $(\sqrt{3}/2) \times (\sqrt{3}/2) = \mathbf{3/4}$ b) $5\pi/6 = 150^\circ$ (2°) $\rightarrow \tan = -\tan(30^\circ) = \mathbf{-\sqrt{3}/3}$ c) $1/2 + 1/2 = \mathbf{1}$ d) $\sin(7\pi/6) = -1/2$ e $\tan(\pi/4) = 1 \rightarrow \mathbf{-1/2}$.

12. a) $\cos \alpha = -1/2 \rightarrow \sin \alpha = +\sqrt{1 - 1/4} = \mathbf{\sqrt{3}/2}$; $\tan \alpha = (\sqrt{3}/2) \div (-1/2) = \mathbf{-\sqrt{3}}$ b) $\tan \alpha = \sqrt{3}/3 \rightarrow \alpha = \mathbf{30^\circ = \pi/6 \text{ rad}}$ c) $\tan \alpha = 1 \rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$; no 3° quadrante ambos são negativos, e de $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ vem $2\sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = \mathbf{-\sqrt{2}/2}$.

Nota: nas respostas, escreve sempre o *raciocínio do sinal* (« α no 2° quadrante $\rightarrow$ seno positivo»). É esse passo que é avaliado, não o valor final isolado.