

Ficha 19 — Progressões aritméticas e geométricas

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Identificar progressões aritméticas e geométricas, usar os termos gerais e as fórmulas das somas e aplicar estes modelos a situações reais, nomeadamente a juros simples e compostos.

Revisão rápida — PA, PG e juros

- **Progressão aritmética (PA):** cada termo obtém-se somando a **razão** $r \rightarrow r = u_{n+1} - u_n$. Termo geral: $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$. Soma: $S_n = n \times (u_1 + u_n) / 2$.
- **Progressão geométrica (PG):** cada termo obtém-se multiplicando pela **razão** $r \rightarrow r = u_{n+1} / u_n$. Termo geral: $u_n = u_1 \times r^{(n-1)}$. Soma: $S_n = u_1 \times (1 - r^n) / (1 - r)$, com $r \neq 1$.
- **PG de razão $|r| < 1$:** a soma dos infinitos termos converge $\rightarrow S = u_1 / (1 - r)$.
- **Monotonia:** PA crescente se $r > 0$ e decrescente se $r < 0$. PG com $u_1 > 0$ é crescente se $r > 1$ e decrescente se $0 < r < 1$.
- **Juros simples (modelo PA):** $C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$ — o juro incide sempre sobre o capital inicial.
- **Juros compostos (modelo PG):** $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$ — o juro incide sobre o capital acumulado.

Exercícios

1. Identifica a PA: indica a razão e o termo geral: a) 3, 7, 11, 15, ... · b) 20, 17, 14, 11,

2. PA: $u_1 = 5$ e $r = 3$. a) Calcula u_{20} . b) Qual é a ordem do primeiro termo superior a 100?

3. Soma de PA: calcula a soma dos 30 primeiros termos de $u_n = 4n - 1$.

4. PA aplicada: um auditório tem 12 filas; a primeira tem 10 cadeiras e cada fila seguinte tem mais 2 do que a anterior. Quantas cadeiras tem o auditório?

5. Identifica a PG: indica a razão e o termo geral: a) 2, 6, 18, 54, ... · b) 100, 50, 25, 12,5,

6. PG: $u_1 = 3$ e $r = 2$. Calcula u_8 .

7. Soma de PG: calcula a soma dos 6 primeiros termos de 2, 6, 18,

8. PG infinita: calcula a soma $8 + 4 + 2 + 1 + 1/2 + \dots$.

9. Juros simples vs. compostos: aplicam-se 1 000 € a uma taxa anual de 5% durante 3 anos. Calcula o capital final nos dois regimes e indica qual é mais vantajoso.

10. Juros compostos: quanto valem 2 000 € aplicados a 3% ao ano, com capitalização anual, ao fim de 10 anos? Arredonda aos cêntimos.

11. V/F — corrige as falsas: a) numa PA a razão obtém-se por diferença · b) numa PG a razão pode ser negativa · c) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ tem soma finita · d) os juros compostos seguem um modelo geométrico · e) a soma dos n primeiros termos de uma PA depende só do primeiro e do último.

12. Aplicação: uma máquina comprada por 5 000 € desvaloriza 10% por ano. a) Qual é o valor ao fim de 4 anos? b) Este comportamento é aritmético ou geométrico? Justifica com a razão.

Dica: para decidir entre PA e PG, olha para os quocientes e para as diferenças entre termos consecutivos — só uma das duas quantidades é constante. Em problemas de juros, pergunta sempre se o juro incide sobre o capital *inicial* (simples) ou sobre o capital *acumulado* (compostos).

Soluções — Progressões e juros

1. a) $r = 7 - 3 = 4 \rightarrow u_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$ b) $r = 17 - 20 = -3 \rightarrow u_n = 20 - 3(n - 1) = 23 - 3n$.

2. a) $u_{20} = 5 + 19 \times 3 = 62$ b) $u_n > 100 \Leftrightarrow 5 + 3(n - 1) > 100 \Leftrightarrow 3n > 98 \Leftrightarrow n > 32,67 \rightarrow$ o primeiro é o de **ordem 33** ($u_{33} = 101$).

3. $u_1 = 3$ e $u_{30} = 4 \times 30 - 1 = 119$. Logo $S_{30} = 30 \times (3 + 119) / 2 = 30 \times 61 = 1\ 830$.

4. PA com $u_1 = 10$ e $r = 2$; $u_{12} = 10 + 11 \times 2 = 32$. Total: $S_{12} = 12 \times (10 + 32) / 2 = 12 \times 21 = 252$ cadeiras.

5. a) $r = 6/2 = 3 \rightarrow u_n = 2 \times 3^{(n-1)}$ b) $r = 50/100 = 1/2 \rightarrow u_n = 100 \times (1/2)^{(n-1)}$.

6. $u_8 = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$.

7. $u_1 = 2$, $r = 3 \rightarrow S_6 = 2 \times (1 - 3^6) / (1 - 3) = 2 \times (1 - 729) / (-2) = 2 \times (-728) / (-2) = 728$.

8. PG com $u_1 = 8$ e $r = 1/2$ ($|r| < 1$): $S = u_1 / (1 - r) = 8 / (1 - 1/2) = 8 / (1/2) = 16$.

9. *Simples*: $1\ 000 \times (1 + 3 \times 0,05) = 1\ 150$ €. *Compostos*: $1\ 000 \times 1,05^3 = 1\ 000 \times 1,157625 = 1\ 157,63$ € (arredondado). Os **juros compostos** são mais vantajosos: +7,63 € (o juro de cada ano passa a incidir também sobre os juros anteriores).

10. $C_{10} = 2\ 000 \times 1,03^{10} = 2\ 000 \times 1,343916 = 2\ 687,83$ € (o juro total é 687,83 €).

11. a) **V** b) **V** — a razão de uma PG pode ser negativa (os termos alternam de sinal) c) **F** — a razão é $2 > 1$, logo a soma cresce sem limite (diverge) d) **V** — $C_n = C_0(1 + i)^n$ é uma PG de razão $1 + i$ e) **V** — $S_n = n(u_1 + u_n)/2$, e como $u_n = u_1 + (n-1)r$, o valor fica determinado por u_1 , r e n .

12. a) $C_4 = 5\ 000 \times 0,9^4 = 5\ 000 \times 0,6561 = 3\ 280,50$ € b) É **geométrico**: cada ano o valor é 90% do anterior, ou seja multiplica-se sempre pela mesma razão $r = 0,9$ (se fosse aritmético, subtraía-se sempre o mesmo valor em euros).

Nota: escreve sempre a fórmula e a substituição antes do resultado — nos problemas de juros, indica explicitamente se o modelo é linear (simples) ou exponencial (compostos).