

# Teste de Matemática — Produto escalar e retas

11.º Ano   Matemática A   10 questões   20 valores   3 páginas

**Instruções:** apresenta todos os cálculos e justifica as conclusões (por exemplo, o sinal do produto escalar para classificar o ângulo). Usa valores exatos sempre que possível. Duração: 90 minutos.

## Grupo I — Produto escalar, norma e ângulo

1. (2 valores) Considera  $u = (3, -2)$  e  $v = (-1, 4)$ . Calcula  $u \cdot v$  e a norma de  $u$ .
2. (2 valores) No espaço,  $u = (2, 1, -2)$  e  $v = (1, 3, 2)$ . Calcula  $u \cdot v$  e classifica o ângulo como agudo, reto ou obtuso, justificando.
3. (2 valores) Determina  $k$  de modo que os vetores  $(k, 2)$  e  $(3, -6)$  sejam perpendiculares.
4. (2 valores) Determina o ângulo entre  $u = (1, 0)$  e  $v = (1, \sqrt{3})$ .

## Grupo II — Declive, inclinação e retas

5. (2 valores) Determina o declive e a equação reduzida da reta que passa em  $A(-1, 2)$  e  $B(3, -2)$ .
6. (2 valores) Uma reta tem declive  $-\sqrt{3}$ . Determina a sua inclinação (em graus) e explica o significado do sinal do declive.

7. (2 valores) Escreve a equação reduzida da reta que passa em  $P(2, 1)$  e é perpendicular à reta de equação  $y = 2x + 3$ .

8. (2 valores) Classifica a posição relativa das retas  $r: y = -2x + 1$  e  $s: 4x + 2y - 5 = 0$ .

9. (2 valores) Determina a amplitude do ângulo formado pelas retas  $r: y = x + 1$  e  $s: y = \sqrt{3}x - 2$ .

### Grupo III — Aplicação vetorial

10. (2 valores) Considera os pontos  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 2)$  e  $C(-2, 4)$ . Mostra que o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $A$  e calcula a sua área.

Fim da prova. Total: 20 valores.

## Soluções e critérios de classificação

1. (2 v)  $u \cdot v = 3 \times (-1) + (-2) \times 4 = -3 - 8 = -11$ .  $|u| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} (\approx 3,61)$ . Como  $u \cdot v < 0$ , o ângulo é obtuso.
2. (2 v)  $u \cdot v = 2 \times 1 + 1 \times 3 + (-2) \times 2 = 2 + 3 - 4 = 1$ . Como  $u \cdot v > 0$ , o ângulo é **agudo** ( $\cos \theta \approx 0,089$ ,  $\theta \approx 84,9^\circ$ ).
3. (2 v)  $(k, 2) \cdot (3, -6) = 3k - 12 = 0 \rightarrow k = 4$ .
4. (2 v)  $u \cdot v = 1 \times 1 + 0 \times \sqrt{3} = 1$ ;  $|u| = 1$  e  $|v| = \sqrt{1 + 3} = 2$ .  $\cos \theta = 1/2 \rightarrow \theta = 60^\circ$ .
5. (2 v)  $m = (-2 - 2) / (3 - (-1)) = -4/4 = -1$ . Como  $A(-1, 2)$  pertence à reta:  $2 = -(-1) + b \rightarrow b = 1$ . Equação:  $y = -x + 1$ .
6. (2 v)  $m = \tan \alpha = -\sqrt{3}$ , com  $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ[ \rightarrow \alpha = 120^\circ$ . O declive negativo indica que a reta é **decrecente** ( $\alpha$  no 2.º quadrante, entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ ).
7. (2 v) A reta dada tem declive 2; a perpendicular tem  $m = -1/2$ . Por  $P(2, 1)$ :  $1 = -1/2 \times 2 + b \rightarrow b = 2$ . Equação:  $y = -x/2 + 2$ .
8. (2 v) Da segunda reta:  $2y = -4x + 5 \rightarrow y = -2x + 5/2$ . Os declives são iguais ( $m_1 = m_2 = -2$ ) mas as ordenadas na origem são diferentes ( $1 \neq 5/2$ ): as retas são **paralelas distintas** (estritamente paralelas).
9. (2 v)  $m_1 = 1$  e  $m_2 = \sqrt{3}$ . Usando  $\tan \theta = |(m_1 - m_2) / (1 + m_1 m_2)|$ :  $\tan \theta = |(1 - \sqrt{3}) / (1 + \sqrt{3})| = 2 - \sqrt{3} (\approx 0,2679) \rightarrow \theta = 15^\circ$ .
10. (2 v)  $AB = (4, 2)$  e  $AC = (-2, 4)$ .  $AB \cdot AC = 4 \times (-2) + 2 \times 4 = -8 + 8 = 0$ , logo  $AB \perp AC$  e o triângulo é **retângulo em A**.  $|AB| = \sqrt{20}$  e  $|AC| = \sqrt{20}$ , pelo que a área é  $(1/2) \times \sqrt{20} \times \sqrt{20} = 10$  unidades de área.

**CrITÉrios:** em cada questão, a cotação distribui-se pelo processo de resolução e pelo resultado. Nas questões 2, 8 e 10 é exigida a justificação (sinal do produto escalar, comparação de declives e ordenadas na origem, e uso do critério  $u \cdot v = 0$ ). Valores exatos não simplificados perdem pontuação parcial.