

Resumo — Produto escalar, vetores e retas

11.º Ano Matemática A 2 páginas

O que este resumo cobre: o produto escalar no plano e no espaço, a norma e o ângulo entre vetores, o critério de perpendicularidade e a sua aplicação ao declive, à inclinação e ao ângulo entre retas.

1. Produto escalar

Contexto	Expressão
Plano ($u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$)	$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2$
Espaço ($u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$)	$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
Forma geométrica	$u \cdot v = u \times v \times \cos \theta$

- O produto escalar é um **número real**, nunca um vetor.
- Propriedades:** comutativa ($u \cdot v = v \cdot u$), distributiva em relação à soma e $u \cdot u = |u|^2$.
- Leitura do sinal:** $u \cdot v > 0 \rightarrow$ ângulo agudo ($\theta < 90^\circ$) $\cdot u \cdot v = 0 \rightarrow$ ângulo reto $\cdot u \cdot v < 0 \rightarrow$ ângulo obtuso ($\theta > 90^\circ$).

2. Norma e ângulo entre vetores

- Norma:** $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ — no plano $\sqrt{x^2 + y^2}$, no espaço $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. É sempre ≥ 0 .
- Ângulo entre vetores:** $\cos \theta = (u \cdot v) / (|u| \times |v|)$. O valor de $\cos \theta$ está sempre em $[-1, 1]$.
- Perpendicularidade:** $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$ (com u e v não nulos).
- Casos particulares:** $u \cdot v = |u||v| \Leftrightarrow \theta = 0^\circ$ (mesma direção e sentido); $u \cdot v = -|u||v| \Leftrightarrow \theta = 180^\circ$ (sentidos opostos).
- Aplicação típica: determinar k para que $(k, 2)$ e $(3, -1)$ sejam perpendiculares $\rightarrow 3k - 2 = 0 \rightarrow k = 2/3$.

3. Demonstrações com produto escalar

- $(u + v) \cdot (u - v) = |u|^2 - |v|^2$ — os termos cruzados $u \cdot v$ e $v \cdot u$ anulam-se por serem iguais.
- Ângulo reto num triângulo:** com $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(0, 3)$, $AB = (4, 0)$ e $AC = (0, 3)$; como $AB \cdot AC = 0$, o triângulo é retângulo em A . Este é o único critério rigoroso para demonstrar um ângulo reto.
- Vetor perpendicular a outro:** para achar $v = (x, y)$ de norma 5 e perpendicular a $(3, 4)$, resolve-se o sistema $3x + 4y = 0$ e $x^2 + y^2 = 25 \rightarrow v = (4, -3)$ ou $v = (-4, 3)$.

4. Declive e inclinação de uma reta

- **Declive:** $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x$. Equação reduzida: $y = m x + b$ (b = ordenada na origem).
- **Inclinação** α é o ângulo com o semieixo positivo Ox , $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$, e verifica-se $m = \text{tg } \alpha$.
- **Vetor diretor** de uma reta de declive m : $u = (1, m)$. Um vetor diretor (a, b) corresponde a $m = b/a$ ($a \neq 0$).
- **Casos particulares:** reta horizontal $\rightarrow m = 0$, $\alpha = 0^\circ$; reta vertical $\rightarrow$ declive não definido, $\alpha = 90^\circ$.

Declive m	0	1	$\sqrt{3}$	-1	—
Inclinação α	0°	45°	60°	135°	90°
Retas	$y = c$	$y = x$	$y = \sqrt{3} x$	$y = -x$	$x = c$

5. Ângulo entre retas e posição relativa

- **Ângulo entre retas:** $\cos \theta = |u \cdot v| / (|u| \times |v|)$, com u e v vetores diretores. O *módulo* garante $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ — o ângulo entre retas é, por convenção, o menor dos dois.
- Alternativa rápida com declives: $\text{tg } \theta = |(m_1 - m_2) / (1 + m_1 m_2)|$.

Situação	Condição
Paralelas distintas	$m_1 = m_2$ e $b_1 \neq b_2$
Coincidentes	$m_1 = m_2$ e $b_1 = b_2$ (mesma equação)
Concorrentes	$m_1 \neq m_2$
Perpendiculares	$m_1 \times m_2 = -1$

6. Erros frequentes e controlo

Atenção: escrever $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ (falta a raiz quadrada); usar o produto escalar sem o módulo no ângulo entre *retas*; concluir que u ou v é nulo só porque $u \cdot v = 0$ (podem ser perpendiculares); atribuir declive 0 a uma reta vertical; e esquecer que a comparação $m_1 m_2 = -1$ não se aplica quando uma das retas é vertical.

Controlo em 3 passos: (1) confirma que o produto escalar é um número e não um vetor; (2) antes de calcular o ângulo, lê o *signal* de $u \cdot v$ para saber se é agudo ou obtuso; (3) no caso das retas verticais, usa os vetores diretores em vez dos declives — a fórmula $m_1 m_2 = -1$ falha aí.