

Ficha 6 — Produto escalar

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Calcular produtos escalares no plano e no espaço, determinar normas e ângulos entre vetores e usar o produto escalar como critério de perpendicularidade.

Revisão rápida — produto escalar, norma e ângulo

- No plano** (referencial ortonormado), com $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$: $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2$.
- No espaço**, com $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$: $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- Definição geométrica:** $u \cdot v = |u| \times |v| \times \cos \theta$, em que θ é o ângulo entre os vetores. O produto escalar é um *número*, não um vetor.
- Norma:** $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ — no plano $\sqrt{x^2 + y^2}$ e no espaço $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. É sempre ≥ 0 .
- Ângulo entre vetores:** $\cos \theta = (u \cdot v) / (|u| \times |v|)$. O resultado está sempre entre -1 e 1 .
- Perpendicularidade:** $u \perp v \iff u \cdot v = 0$ (com u e v não nulos) — critério essencial para demonstrar retângulos e ângulos retos.

Propriedade	Expressão
Comutativa	$u \cdot v = v \cdot u$
Norma ao quadrado	$u \cdot u = u ^2$
Perpendicularidade	$u \perp v \iff u \cdot v = 0$
Ângulo nulo / raso	$u \cdot v = u v $ (0°) $\cdot u \cdot v = - u v $ (180°)

Exercícios

1. Calcula o produto escalar (no plano): a) $u = (2, 3)$ e $v = (1, -1)$ · b) $u = (-1, 4)$ e $v = (3, 2)$ · c) $u = (0, 5)$ e $v = (-2, 0)$ · d) $u = (2, 2)$ e $v = (3, -3)$. Em qual dos casos os vetores são perpendiculares?
2. Calcula a norma: a) $(3, 4)$ · b) $(-1, 2)$ · c) $(2, -1, 2)$ no espaço · d) $(1, 1, 1)$ no espaço.
3. Determina o ângulo entre os vetores: a) $(1, 0)$ e $(1, 1)$ · b) $(1, 0)$ e $(0, 1)$ · c) $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ · d) $(0, 1)$ e $(1, -1)$.

4. Determina o valor de k para que os vetores sejam perpendiculares: a) $(k, 2)$ e $(3, -1)$ · b) $(1, k)$ e $(k, 4)$ · c) $(k, 1, 2)$ e $(1, -2, k)$ no espaço.

5. No espaço, considera $u = (1, 2, -1)$ e $v = (2, 0, 3)$. Calcula: a) $u \cdot v$ · b) $|u|$ · c) $|v|$ · d) o ângulo entre u e v (1 casa decimal).

6. Ângulo reto: usa o produto escalar para mostrar que: a) o triângulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(0, 3)$ é retângulo em A · b) o triângulo de vértices $P(1, 1)$, $Q(4, 1)$ e $R(4, 5)$ é retângulo em Q .

7. V/F — corrige as falsas: a) $u \cdot v = v \cdot u$ · b) $u \cdot u = |u|^2$ · c) se $u \cdot v = 0$, então u ou v tem de ser o vetor nulo · d) o produto escalar de dois vetores é um vetor · e) no espaço, $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

8. Ângulo de 60° : determina o valor positivo de k para que o ângulo entre $u = (1, 0)$ e $v = (k, 1)$ seja 60° (valor exato).

9. Completa a tabela (no plano):

u	v	$u \cdot v$	$ u $	Perpendiculares?
(1, 2)	(2, -1)	---	---	---
(3, 0)	(0, -4)	---	---	---
(1, 1)	(2, 2)	---	---	---

10. Demonstra que, para quaisquer vetores u e v , se tem $(u + v) \cdot (u - v) = |u|^2 - |v|^2$. *Indicação:* usa a propriedade distributiva e $u \cdot u = |u|^2$.

11. Com coordenadas: considera $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ e $C(7, 4)$. a) Calcula $AB \cdot AC$ b) Calcula $|AB|$ e $|AC|$ c) Determina o ângulo BAC.

12. Problema: determina as coordenadas de um vetor $v = (x, y)$ de norma 5 e perpendicular ao vetor $(3, 4)$. Apresenta a solução (ou soluções) e justifica.

Dica: a norma vem sempre de $\sqrt{u \cdot u}$, nunca de $u \cdot u$. E o critério de perpendicularidade é a única forma rigorosa de demonstrar um ângulo reto — não basta «ver» no desenho.

Soluções — Produto escalar

1. a) $2 \times 1 + 3 \times (-1) = -1$ b) $(-1) \times 3 + 4 \times 2 = 5$ c) $0 \times (-2) + 5 \times 0 = 0$ d) $2 \times 3 + 2 \times (-3) = 0$. São perpendiculares nos casos **c) e d)** (produto escalar nulo).

2. a) $\sqrt{9+16} = 5$ b) $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{4+1+4} = 3$ d) $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

3. a) $\cos \theta = 1 / (1 \times \sqrt{2}) = \sqrt{2}/2 \rightarrow \theta = 45^\circ$ b) $\cos \theta = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ$ c) $\cos \theta = -1 \rightarrow \theta = 180^\circ$ (vetores simétricos) d) $\cos \theta = -1 / (1 \times \sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2 \rightarrow \theta = 135^\circ$.

4. a) $3k - 2 = 0 \rightarrow k = 2/3$ b) $1 \times k + k \times 4 = 5k = 0 \rightarrow k = 0$ c) $k \times 1 + 1 \times (-2) + 2 \times k = 3k - 2 = 0 \rightarrow k = 2/3$.

5. a) $1 \times 2 + 2 \times 0 + (-1) \times 3 = -1$ b) $|u| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ c) $|v| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$ d) $\cos \theta = -1 / (\sqrt{6} \times \sqrt{13}) = -1/\sqrt{78} \approx -0,1132 \rightarrow \theta \approx 96,5^\circ$ (ângulo obtuso, coerente com o produto escalar negativo).

6. a) $AB = (4, 0)$ e $AC = (0, 3) \rightarrow AB \cdot AC = 4 \times 0 + 0 \times 3 = 0$, logo $AB \perp AC$: o triângulo é retângulo em **A** b) $QP = (1 - 4, 1 - 1) = (-3, 0)$ e $QR = (4 - 4, 5 - 1) = (0, 4) \rightarrow QP \cdot QR = -3 \times 0 + 0 \times 4 = 0$, logo é retângulo em **Q**.

7. a) **V** — o produto escalar é comutativo b) **V** c) **F** — dois vetores *não nulos* podem ser perpendiculares e ter produto escalar nulo d) **F** — o produto escalar é um **número real**, não um vetor e) **V**.

8. $\cos 60^\circ = (u \cdot v) / (|u| \times |v|) = k / (1 \times \sqrt{k^2 + 1}) = 1/2$. Elevando ao quadrado: $4k^2 = k^2 + 1 \rightarrow 3k^2 = 1 \rightarrow k = \sqrt{3}/3$ (toma-se o valor positivo, para o ângulo ser agudo).

9. $(1,2) \cdot (2,-1) = 2 - 2 = 0$, $|u| = \sqrt{5}$, perpendiculares: **sim** | $(3,0) \cdot (0,-4) = 0$, $|u| = 3$, **sim** | $(1,1) \cdot (2,2) = 2 + 2 = 4$, $|u| = \sqrt{2}$, **não** (são paralelos, com o mesmo sentido).

10. $(u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u - u \cdot v + v \cdot u - v \cdot v$. Como $u \cdot v = v \cdot u$, os termos cruzados **anulam-se**: $= u \cdot u - v \cdot v = |u|^2 - |v|^2$, como se pretendia demonstrar.

11. a) $AB = (3 - 1, 6 - 2) = (2, 4)$ e $AC = (7 - 1, 4 - 2) = (6, 2) \rightarrow AB \cdot AC = 12 + 8 = 20$ b) $|AB| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ e $|AC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ c) $\cos \theta = 20 / (2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}) = 20 / \sqrt{800} = 20 / (20\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta = 45^\circ$.

12. As condições são $v \cdot (3, 4) = 0$ e $|v| = 5$: $3x + 4y = 0 \rightarrow y = -3x/4$. Substituindo em $x^2 + y^2 = 25$: $x^2 + 9x^2/16 = 25 \rightarrow 25x^2/16 = 25 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$. Logo **$v = (4, -3)$ ou $v = (-4, 3)$** — são simétricos, ambos de norma 5 ($\sqrt{16+9} = 5$) e ambos perpendiculares a $(3, 4)$, pois $3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0$.

Nota: quando o ângulo vem por $\cos \theta$, interpreta o *senal* antes de calcular: produto escalar negativo significa ângulo obtuso (maior que 90°), e positivo significa ângulo agudo.