

Teste de Matemática — Polinómios e funções racionais

11.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e justificações. Nas fatorizações mostra a aplicação de Ruffini; nas inequações, o quadro de sinais; nas funções racionais, o domínio e as assíntotas. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Divisão, Ruffini e zeros

1. (2 valores) Divide $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ por $(x - 1)$ e indica o quociente e o resto. A divisão é exata? Justifica.

2. (2 valores) Determina, sem efetuar a divisão, o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ por $(x + 1)$.

3. (2 valores) Mostra que 1 é zero de $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e decompõe $P(x)$ em fatores de grau 1.

4. (2 valores) Para $P(x) = (x + 2)^2(x - 1)$, indica o grau, os zeros e a respetiva multiplicidade. Em qual dos zeros o gráfico é tangente ao eixo Ox?

Grupo II — Funções polinomiais e racionais

5. (2 valores) Para $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, determina os zeros (fatoriza com $t = x^2$) e indica o comportamento no infinito.

6. (2 valores) Resolve $x^3 - 4x^2 = 0$, indicando os zeros e as respetivas multiplicidades.

7. (2 valores) Resolve $x^3 - x > 0$, apresentando o quadro de sinais e o conjunto-solução.

8. (2 valores) Para $f(x) = 3 + \frac{2}{x-4}$, indica o domínio, as assíntotas e os pontos de interseção com os eixos coordenados.

Grupo III — Operações e aplicações

9. (2 valores) Com $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$, determina o domínio e os zeros de (f / g) .

10. (2 valores) O custo médio por unidade, em euros, ao produzir x unidades é $C(x) = 6 + 18/(x + 2)$. a) Qual é o custo médio tendencial para produções muito grandes? b) A partir de quantas unidades o custo médio não excede 7 €?

Soluções e critérios de classificação

1. Coeficientes 1, -5, 8, -4 com $a = 1 \rightarrow 1, -4, 4, |0$. Quociente: $x^2 - 4x + 4 (= (x - 2)^2)$; resto: 0. A divisão é **exata**, logo 1 é zero de P (confirmação: $P(1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0 \checkmark$).

2. Pelo teorema do resto, o resto é $P(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) - 5 = -2 - 3 - 1 - 5 = -11$.

3. $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$, logo $(x - 1)$ é fator. Ruffini com $a = 1: 1, -2, -1, 2 \rightarrow 1, -1, -2, |0$, quociente $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Logo **$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$** .

4. Grau 3. Zeros: $x = -2$, **multiplicidade 2**, e $x = 1$, **multiplicidade 1**. Como a multiplicidade de -2 é **par**, é aí que o gráfico é **tangente** ao eixo Ox (em $x = 1$ atravessa-o).

5. Com $t = x^2: t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) \rightarrow f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; zeros: $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$. Grau par com coeficiente positivo $\Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ em ambos os extremos ($x \rightarrow \pm\infty$).

6. $x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0$ com **multiplicidade 2** e $x = 4$ com **multiplicidade 1**.

7. $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$, com zeros em $-1, 0$ e 1 . Quadro de sinais: $x < -1 \rightarrow$ **negativo**; $]-1, 0[\rightarrow$ **positivo**; $]0, 1[\rightarrow$ **negativo**; $x > 1 \rightarrow$ **positivo**. Conjunto-solução: **$x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$** .

8. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{4\}$; assíntota vertical **$x = 4$** ; assíntota horizontal **$y = 3$** . Com Oy: $f(0) = 3 + 2/(0 - 4) = 3 - 0,5 = 2,5 \rightarrow (0; 2,5)$. Com Ox: $3 + 2/(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = -2/3 \Leftrightarrow x = 10/3 \rightarrow (10/3; 0)$.

9. $(f/g)(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$; domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (zero de g). Simplificando: $(x - 1)(x + 1)/(x + 1) = x - 1$, logo o zero é **$x = 1$** — repara que $x = -1$ anula o numerador mas **não pertence ao domínio**.

10. a) Quando $x \rightarrow +\infty, 18/(x + 2) \rightarrow 0$, logo $C(x) \rightarrow 6 \text{ €}$ (assíntota horizontal $y = 6$) b) $C(x) \leq 7 \Leftrightarrow 18/(x + 2) \leq 1 \Leftrightarrow (x + 2 > 0) \ x + 2 \geq 18 \Leftrightarrow x \geq 16$: a partir de **16 unidades**.

CrITÉRIOS: 2 valores por questão — 1,2 valores para o processo de resolução e 0,8 valores para o resultado e a interpretação. Não se atribui cotação total sem quadro de sinais (questão 7) nem sem indicação do domínio (questões 8 e 9).