

Resumo — Polinómios, funções racionais e assímtotas

11.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne o estudo de polinómios e funções racionais do 11.º ano: divisão inteira, regra de Ruffini e algoritmo de Horner, teorema do resto, zeros e multiplicidade, decomposição em fatores, funções cúbicas e quárticas, operações com funções e assímtotas de funções racionais.

1. Polinómios: grau e igualdade

- Um **polinómio** é uma soma de monómios $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$; o **grau** é o maior expoente com coeficiente não nulo e a_n é o **coeficiente principal**.
- Dois polinómios são **iguais** se tiverem o mesmo grau e os coeficientes correspondentes iguais — é por isso que se identificam coeficientes ao determinar parâmetros.
- Valor num ponto**: $P(a)$ obtém-se substituindo x por a (ou, mais depressa, por Horner).

2. Divisão inteira e teorema do resto

$D(x) = d(x) \times Q(x) + R(x)$, com **grau** $R < \text{grau } d$. Se $R = 0$, a divisão é exata e $d(x)$ é *divisor* de $D(x)$.

Teorema do resto: o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ é $P(a)$. Consequência imediata: $(x - a)$ é **fator de $P(x)$** $\Leftrightarrow P(a) = 0$, isto é, $\Leftrightarrow a$ é zero de P .

3. Regra de Ruffini e algoritmo de Horner

- Serve para dividir por $(x - a)$: escrevem-se os coeficientes de P **completando com 0 os graus em falta**, desce-se o primeiro, multiplica-se por a e soma-se ao seguinte, e assim sucessivamente. O último valor é o **resto** e os anteriores são os coeficientes do **quociente** (de grau uma unidade inferior).
- Horner** é o mesmo processo usado só para avaliar: o último valor obtido é $P(a)$ — mais rápido e com menos erros do que substituir diretamente.
- Atenção ao sinal: em $(x + 2)$ o valor a a usar é $a = -2$.

4. Zeros e multiplicidade

- Diz-se que a é **zero de multiplicidade m** de P se $P(x) = (x - a)^m \times Q(x)$ com $Q(a) \neq 0$.
- Multiplicidade ímpar** $\Rightarrow$ o gráfico **atravessa** o eixo Ox ; **multiplicidade par** $\Rightarrow$ o gráfico é **tangente** (toca e inverte o sentido).
- Um polinómio de grau n tem **no máximo n zeros** reais e decompõe-se em fatores lineares e quadráticos irredutíveis.

5. Funções cúbicas e quárticas

- Comportamento no infinito** (só conta o termo de maior grau): grau **ímpar** $\Rightarrow$ sinais opostos nos dois extremos (cúbica com $a_3 > 0$: $-\infty$ em $-\infty$ e $+\infty$ em $+\infty$); grau **par** $\Rightarrow$ mesmo sinal nos dois extremos (quártica com $a_4 > 0$: $+\infty$ nos dois).
- Grau ímpar garante pelo menos um zero real**. Uma cúbica tem 1, 2 ou 3 zeros reais; uma quártica tem 0 a 4.
- Existência de zeros: se f é contínua e $f(a), f(b)$ têm sinais contrários, há um zero em $]a, b[$ (**teorema de Bolzano**, uso intuitivo).

6. Operações com funções

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$; $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$; $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$.
- **Domínios:** soma, diferença e produto têm por domínio a **interseção** dos domínios; no **quociente** excluem-se ainda os **zeros do denominador**.
- **Zeros do produto:** $f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$.
- **Sinal:** produto e quociente têm o **mesmo padrão de sinal** (o quociente apenas não existe nos zeros do denominador) — estuda-se por **quadro de sinais**.
- Ao simplificar um quociente (por exemplo $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$) a expressão simplificada vale só **fora dos zeros do denominador**.

7. Funções racionais $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$

- **Domínio:** $\mathbb{R} \setminus \{c\}$.
- **Assíntotas:** **vertical** $x = c$ e **horizontal** $y = a$ ($f(x) \rightarrow a$ quando $x \rightarrow \pm\infty$).
- **Interseções:** com Oy calcula-se $f(0)$; com Ox resolve-se $f(x) = 0$.
- **Sinal:** reduz-se a fração única, $a + \frac{b}{x - c} = \frac{a(x - c) + b}{x - c}$, e faz-se o quadro de sinais (c nunca pertence ao domínio).
- **Monotonia:** em **cada ramo**, decrescente se $b > 0$ e crescente se $b < 0$ — nunca é monótona em todo o domínio.
- **Transformações de $1/x$:** translação horizontal de c , dilatação vertical de fator $|b|$ (espelho se $b < 0$) e translação vertical de a .

8. Tabela-resumo das assíntotas

Tipo	Equação	Como se encontra
Vertical	$x = c$	zeros do denominador (fora do domínio)
Horizontal	$y = a$	parte constante: valor de $f(x)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$

9. Erros frequentes a evitar

- Não **completar com 0** os graus em falta antes de aplicar Ruffini ($x^3 + 1 \rightarrow$ coeficientes 1, 0, 0, 1).
- Usar a em vez de $-a$ no divisor ($x + 2$).
- Confundir o **resto** com o **quociente**: o último valor de Ruffini é o resto.
- Escrever o domínio do quociente sem excluir os zeros do denominador, ou «passar a multiplicar» o denominador numa inequação sem estudar o seu sinal.
- Concluir que o produto é monótono em todo o domínio de uma função racional (só o é ramo a ramo).

Controlo rápido: para $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, aplica Ruffini com $a = 1 \rightarrow 1, -3, 2, |0$. Conclui: quociente $x^2 - 3x + 2$, **resto 0**, logo 1 é zero de P (e $P(1) = 0$, como o teorema do resto exige).