

Ficha 27 — Polinómios: divisão, Ruffini e zeros

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Efetuar a divisão inteira de polinómios, usar a regra de Ruffini (algoritmo de Horner), aplicar o teorema do resto, determinar zeros e multiplicidades e decompor polinómios em fatores.

Revisão rápida — divisão inteira, Ruffini e zeros

- **Divisão inteira:** $D(x) = d(x) \times Q(x) + R(x)$, com **grau $R < \text{grau } d$** . Se $R(x) = 0$, a divisão é exata e $d(x)$ é *divisor* de $D(x)$.
- **Teorema do resto:** o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ é $P(a)$. Consequência: $(x - a)$ é fator de $P(x)$ **se e só se $P(a) = 0$** — isto é, se a for zero de P .
- **Regra de Ruffini** (divisor $x - a$): escrevem-se os coeficientes de P (completando com 0 os graus ausentes), «desce-se» o primeiro e multiplica-se por a somando ao seguinte; o último valor obtido é o **resto** e os anteriores são os coeficientes do **quociente** (de grau uma unidade inferior).
- **Zero com multiplicidade m :** $P(x) = (x - a)^m \times Q(x)$ com $Q(a) \neq 0$. A multiplicidade diz quantas vezes $(x - a)$ aparece como fator.
- **Decomposição em fatores:** um polinómio de grau n decompõe-se em fatores lineares $(x - a)$ e quadráticos irredutíveis, até n fatores lineares no máximo.
- **Avaliar por Horner** é o mesmo processo de Ruffini: obtém $P(a)$ sem substituir diretamente — mais rápido e com menos erros.

Exercícios

1. Divisão inteira: divide $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $(x - 1)$, indicando o quociente e o resto. A divisão é exata?

2. Ruffini: usa a regra de Ruffini para dividir $2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ por $(x + 2)$.

3. Teorema do resto: determina o resto da divisão de $P(x) = x^4 - 2x + 3$ por $(x + 1)$, sem efetuar a divisão.

4. Teorema do resto: determina o resto da divisão de $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ por $(x - 2)$. Para que valor de k é que $(x - 1)$ é divisor de $P(x) = x^3 + kx^2 - 3x + 2$?

5. Fatorização: verifica se $(x - 3)$ é fator de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ e, em caso afirmativo, decompõe $P(x)$ em fatores de grau 1.

6. Multiplicidade: indica o grau, os zeros e a respetiva multiplicidade: a) $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ · b) $Q(x) = x(x + 2)^3$.

7. Multiplicidade tripla: mostra que $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tem um único zero, com multiplicidade 3.

8. Decomposição: decompõe em fatores $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ (sugestão: agrupa os termos dois a dois).

9. Divisão exata: divide $x^3 + 1$ por $(x + 1)$ e conclui se $(x + 1)$ é fator.

10. Horner: avalia $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$ em $x = 2$, usando o algoritmo de Horner. Confirma o resultado por substituição direta.

11. V/F — corrige as falsas: a) o grau do resto é menor do que o grau do divisor · b) se $P(a) = 0$, então $(x - a)$ é divisor de P · c) o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ é $P(-a)$ · d) se um zero tem multiplicidade par, o gráfico é tangente ao eixo Ox nesse ponto · e) $(x - 1)^3$ tem três zeros distintos.

12. (Python) Escreve um programa que aplique a regra de Ruffini à divisão de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $(x - 1)$ e imprima os coeficientes do quociente e o resto.

```
def ruffini(coefs, a):
    out = [coefs[0]]
    for c in coefs[1:]:
        out.append(c + out[-1] * a)
    return out[:-1], out[-1]

q, r = ruffini([1, -4, 5, -2], 1)
print(q, r)
```

Dica: na regra de Ruffini **completa sempre os graus em falta com 0** (por exemplo, $x^3 + 1$ escreve-se como coeficientes 1, 0, 0, 1) — esquecer um zero é o erro mais frequente. E recorda: o divisor de Ruffini é $(x - a)$, logo usa-se o valor de a *com o sinal trocado* do que aparece no divisor.

Soluções — Polinómios

1. Coeficientes 1, -4, 5, -2 com $a = 1 \rightarrow 1, -3, 2, |0$. Quociente: $x^2 - 3x + 2$; resto: 0. A divisão é **exata** (1 é zero de P).
 2. Coeficientes 2, 3, -5, 1 com $a = -2 \rightarrow 2, -1, -3, |7$. Quociente: $2x^2 - x - 3$; resto: 7.
 3. $P(-1) = 1 - 2(-1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$ (o resto de P por $(x + 1)$ é $P(-1)$).
 4. $P(2) = 8 + 8 - 2 + 5 = 19$. Para $(x - 1)$ ser divisor: $P(1) = 1 + k - 3 + 2 = k = 0 \rightarrow k = 0$.
 5. $P(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$, logo $(x - 3)$ é **fator**. Dividindo por Ruffini ($a = 3$) obtém-se $x^2 + x - 2$, que se fatoriza em $(x + 2)(x - 1)$. Decomposição: **$P(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 1)$** .
 6. a) Grau 3; zeros: **$x = 1$ (multiplicidade 2)** e **$x = -3$ (multiplicidade 1)** b) Grau 4; zeros: **$x = 0$ (multiplicidade 1)** e **$x = -2$ (multiplicidade 3)**.
 7. Repara que $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ (coeficientes 1, -3, 3, -1). Logo o único zero é **$x = 1$** , com **multiplicidade 3** (na forma $P(x) = (x - 1)^3 \times 1$, e o fator restante vale $1 \neq 0$).
 8. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.
 9. Completando os graus: coeficientes 1, 0, 0, 1 com $a = -1 \rightarrow 1, -1, 1, |0$. Quociente: $x^2 - x + 1$; resto 0 $\rightarrow$ **$(x + 1)$ é fator** e $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.
 10. Coeficientes 2, 0, -3, 1, -5 com $a = 2 \rightarrow$ Horner: 2, 4, 5, 11, **17**. Logo $P(2) = 17$; por substituição direta: $2 \times 16 - 3 \times 4 + 2 - 5 = 32 - 12 + 2 - 5 = 17 \checkmark$.
 11. a) **V** b) **V** (consequência do teorema do resto) c) **F** — o resto é **$P(a)$** e não $P(-a)$ d) **V** — multiplicidade par $\Rightarrow$ o gráfico toca e volta atrás (tangente) e) **F** — $(x - 1)^3$ tem **um único zero**, $x = 1$, com multiplicidade 3.
 12. O programa imprime **[1, -3, 2] 0**: os coeficientes do quociente são 1, -3 e 2 (isto é, $x^2 - 3x + 2$) e o resto é 0 — exatamente o resultado do exercício 1. Confirma também que o último valor obtido por Ruffini é o resto (e, pelo teorema do resto, o valor de $P(a)$).
- Nota:** escreve sempre o divisor na forma $(x - a)$ antes de aplicar Ruffini — em $(x + 2)$, $a = -2$. E justifica cada afirmação pelo teorema do resto em vez de efetuar divisões desnecessárias.