

## Ficha 29 — Operações com funções

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

**Objetivo:** Construir as funções soma, diferença, produto e quociente de duas funções, determinar os respetivos domínios, zeros e estudar o sinal das funções resultantes por meio de quadros de sinais.

### Revisão rápida — operar com funções

- **Operações ponto a ponto:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ,  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ ,  $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ .
- **Domínios:** o domínio de  $f + g$ ,  $f - g$  e  $f \times g$  é a **interseção** dos domínios de  $f$  e  $g$ ; no **quociente** excluem-se ainda os zeros de  $g$  (não se pode dividir por zero).
- **Zeros do produto:**  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  **ou**  $g(x) = 0$  — os zeros do produto são os zeros de ambas, reunidos.
- **Sinal do produto e do quociente:** em cada intervalo o sinal obtém-se multiplicando os sinais dos fatores — por isso o **quadro de sinais** do produto e do quociente têm o mesmo padrão (o quociente apenas não existe nos zeros de  $g$ ).
- **Simplificações:** ao simplificar um quociente (por exemplo  $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ ) a expressão simplificada **só é válida fora dos zeros do denominador** — o domínio mantém-se o original.

### Exercícios

1. Operações: com  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = x - 3$ , determina as expressões de  $(f + g)(x)$ ,  $(f - g)(x)$ ,  $(f \times g)(x)$  e  $(f / g)(x)$ .

2. Domínios: para as funções da questão anterior, indica o domínio de  $f + g$  e o domínio de  $f / g$ , justificando.

3. Zeros da soma: determina os zeros de  $(f + g)$  para  $f$  e  $g$  da questão 1.

4. Zeros do produto: determina os zeros de  $(f \times g)$ , com  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = x - 3$ .

5. Sinal do produto: estuda o sinal de  $(f \times g)(x) = (x + 1)(x - 3)$  com um quadro de sinais e indica onde é positiva e onde é negativa.

6. Sinal do quociente: estuda o sinal de  $(f / g)(x) = (x + 1)/(x - 3)$ . Compara com o resultado anterior e explica a diferença.

7. Simplificação: considera  $h(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ . a) Indica o domínio de  $h$ . b) Simplifica a expressão. c) A função  $h$  é igual à função  $x + 1$ ? Justifica.

8. Zeros do produto: com  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = x^2 - 4$ , determina os zeros de  $(f \times g)$ .

9. Zeros da diferença: com  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x$ , determina os zeros de  $(f - g)$ .

10. Problema (lucro): uma empresa tem receita  $R(x) = 10x$  e custo  $C(x) = 2x + 60$  ( $x$  = número de unidades). a) Escreve a função lucro  $L(x) = R(x) - C(x)$ . b) A partir de quantas unidades a empresa tem lucro positivo?

11. V/F — corrige as falsas: a) o domínio de  $f / g$  exclui os zeros de  $g$  · b) os zeros de  $f \times g$  são os zeros de  $f$  unidos aos zeros de  $g$  · c) o domínio de  $f + g$  é sempre  $\mathbb{R}$  · d) no quociente, o quadro de sinais é igual ao do produto, exceto nos zeros do denominador · e)  $h(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$  é igual a  $x + 1$  em todos os pontos do seu domínio.

12. Problema: com  $f(x) = x - 2$  e  $g(x) = x + 3$ , estuda o sinal de  $(f / g)(x)$ , indicando o domínio e o conjunto onde o quociente é positivo.

**Dica:** nos quocientes, **começa sempre pelo domínio**: marca os zeros do denominador e exclui-os antes de qualquer estudo de sinal. E lembra-te: simplificar uma expressão *não* altera o domínio original — os zeros do denominador continuam a não pertencer ao domínio.

## Soluções — Operações com funções

1.  $(f + g)(x) = (x + 1) + (x - 3) = 2x - 2$ ;  $(f - g)(x) = (x + 1) - (x - 3) = 4$ ;  $(f \times g)(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$ ;  $(f / g)(x) = (x + 1)/(x - 3)$ .

2.  $f + g$  tem domínio  $\mathbb{R}$  ( $f$  e  $g$  são polinómios, definidos em  $\mathbb{R}$ ).  $f / g$  tem domínio  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , porque  $g(3) = 0$  e não se pode dividir por zero.

3.  $(f + g)(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$ .

4.  $(f \times g)(x) = (x + 1)(x - 3) = 0 \rightarrow x = -1$  ou  $x = 3$ .

5. Quadro de sinais de  $(x + 1)(x - 3)$ , com zeros em  $-1$  e  $3$ : para  $x < -1$ ,  $(-)(-)$  = **positivo**; em  $]-1, 3[$ ,  $(+)(-)$  = **negativo**; para  $x > 3$ ,  $(+)(+)$  = **positivo**. Logo  $(f \times g) > 0$  em  $]-\infty, -1[$  u  $]3, +\infty[$  e  $< 0$  em  $]-1, 3[$ .

6. O quociente  $(x + 1)/(x - 3)$  tem o mesmo padrão de sinal do produto (positivo em  $]-\infty, -1[$  u  $]3, +\infty[$  e negativo em  $]-1, 3[$ ), porque a divisão de sinais segue a mesma regra da multiplicação. A diferença é que em  $x = 3$  o quociente **não existe** (a função não está definida), enquanto o produto aí vale 0.

7. a) Domínio:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  (o denominador anula-se em  $x = 1$ ) b)  $h(x) = (x - 1)(x + 1)/(x - 1) = x + 1$ , para  $x \neq 1$  c) **Não são iguais**:  $h$  não está definida em  $x = 1$ , enquanto a função  $x + 1$  está. Têm a mesma expressão analítica apenas no domínio de  $h$ .

8.  $(f \times g)(x) = (2x + 1)(x^2 - 4) = (2x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = -1/2, x = 2$  ou  $x = -2$ .

9.  $(f - g)(x) = x^2 - x = x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0$  ou  $x = 1$ .

10. a)  $L(x) = 10x - (2x + 60) = 8x - 60$  b)  $L(x) > 0 \Leftrightarrow 8x > 60 \Leftrightarrow x > 7,5$ . Como  $x$  conta unidades inteiras, o lucro é positivo a partir de **8 unidades** (com 7 unidades o lucro é negativo:  $-4$ ).

11. a) **V** b) **V** c) **F** — o domínio de  $f + g$  é a **interseção** dos domínios de  $f$  e  $g$  (é  $\mathbb{R}$  apenas se ambas forem definidas em  $\mathbb{R}$ ) d) **V** e) **V** — dentro do domínio ( $x \neq 1$ ) as duas expressões coincidem.

12. Domínio:  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  (zero do denominador). Zeros do numerador:  $x = 2$ . Quadro de sinais: para  $x < -3$ ,  $(-)/(-)$  = **positivo**; em  $]-3, 2[$ ,  $(+)/(-)$  = **negativo**; para  $x > 2$ ,  $(+)/(+)$  = **positivo**. O quociente é positivo em  $]-\infty, -3[$  u  $]2, +\infty[$ .

**Nota:** apresenta sempre o domínio *antes* do estudo de sinal e escreve o quadro de sinais — é o processo que demonstra o raciocínio e que vale pontuação.