

Ficha 4 — Funções trigonométricas e modelação

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Caracterizar as funções seno, cosseno e tangente (domínio, contradomínio, período, zeros, paridade) e interpretar as famílias $y = a + b \sin(c(x - d))$ em contextos reais.

Revisão rápida — as funções trigonométricas

- f(x) = sen x:** domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1, 1]$, período 2π , zeros em $x = k\pi$, *ímpar* (gráfico simétrico em relação à origem).
- f(x) = cos x:** domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1, 1]$, período 2π , zeros em $x = \pi/2 + k\pi$, *par* (simétrico em relação ao eixo Oy).
- f(x) = tg x:** domínio $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, contradomínio $\mathbb{R}$, período π , zeros em $x = k\pi$, *ímpar*.
- Família $y = a + b \sin(c(x - d))$:** a = valor médio (deslocamento vertical) · $|b|$ = amplitude · **período** = $2\pi / |c|$ · d = deslocamento horizontal.
- Extremos:** máximo = $a + |b|$ e mínimo = $a - |b|$. A amplitude é metade da distância entre o máximo e o mínimo.
- Modelação:** fenómenos periódicos (marés, temperatura, roda-gigante) descrevem-se por $a + b \sin(c(x - d))$ — a é o valor médio em torno do qual a grandeza oscila.

Função	Período	Contradomínio	Zeros	Paridade
sen x	2π	$[-1, 1]$	$k\pi$	ímpar
cos x	2π	$[-1, 1]$	$\pi/2 + k\pi$	par
tg x	π	$\mathbb{R}$	$k\pi$	ímpar

Exercícios

1. Caracteriza cada função (período, contradomínio, zeros e paridade): a) $f(x) = \sin x$ · b) $g(x) = \cos x$ · c) $h(x) = \tan x$.

2. Para cada função, indica a amplitude, o valor médio, o período, o máximo e o mínimo: a) $y = 3 + 2 \sin x$ · b) $y = -1 + 4 \cos(2x)$ · c) $y = 5 \sin(\pi x/3)$ · d) $y = 10 + 6 \cos(x - \pi/4)$.

3. Escreve a expressão da função: a) amplitude 4, máximo 5 e período 2π · b) amplitude 3, valor médio 2 e período π .

4. Considera $f(x) = 2 + 3 \sin x$. Calcula: a) $f(0)$ · b) $f(\pi/2)$ · c) $f(\pi)$ · d) $f(3\pi/2)$ · e) o máximo e o mínimo da função.

5. Determina o período de cada função: a) $\sin(3x)$ · b) $\cos(x/2)$ · c) $\tan(2x)$ · d) $\sin(\pi x)$.

6. Para $f(x) = 1 + 2 \cos x$ em $[0, 2\pi]$: a) determina os zeros · b) indica o máximo e o mínimo e em que abscissas ocorrem.

7. Estuda a monotonia de $f(x) = 3 \sin x$ no intervalo $[0, 2\pi]$: indica os intervalos de crescimento e de decréscimo e os extremos (valor e abscissa).

8. V/F — corrige as falsas: a) A função $\sin x$ tem período 2π · b) A função $\cos x$ é ímpar · c) A função $\tan x$ está definida em $x = \pi/2$ · d) O contradomínio de $2 + 3 \cos x$ é $[-1, 5]$ · e) O período de $\sin(4x)$ é $\pi/2$.

9. Marés: a altura da água num porto, em metros, é dada por $h(t) = 3 + 2 \sin(\pi t/6)$, com t em horas. a) Qual é a altura máxima e a mínima? b) Qual é o período (duração de um ciclo)? c) Qual é a altura às 0 h? d) A que horas, nas primeiras 12 h, se atinge a altura máxima?

10. Completa a tabela para $f(x) = 4 - 2 \cos x$:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos x$	1	---	---	---
$f(x)$	---	---	---	---

11. Transformações: descreve as transformações que levam o gráfico de $\sin x$ ao de $y = 2 + 3 \sin(x - \pi/2)$ e indica o período e o contradomínio da nova função.

12. Temperatura: num dia de verão, a temperatura de uma cidade, em °C, é aproximadamente $T(t) = 15 + 10 \sin(\pi(t - 6)/12)$, com t em horas ($0 \leq t < 24$). a) Qual é a temperatura máxima e a mínima e a que horas ocorrem? b) Qual é a temperatura às 6 h? c) Qual é o período da função?

Dica: o período vem sempre de $2\pi / |c|$ (ou $\pi / |c|$ na tangente) — não do valor de a nem de b . Já a amplitude é $|b|$, nunca b : o sinal de b só desloca o gráfico horizontalmente.

Soluções — Funções trigonométricas e modelação

1. a) $\sin x$: período 2π , contradomínio $[-1, 1]$, zeros em $x = k\pi$, ímpar b) $\cos x$: período 2π , contradomínio $[-1, 1]$, zeros em $x = \pi/2 + k\pi$, par c) $\tan x$: período π , contradomínio $\mathbb{R}$, zeros em $x = k\pi$, ímpar.

2. a) amplitude 2, médio 3, período 2π , máx 5, mín 1 b) amplitude 4, médio -1, período π ($2\pi \div 2$), máx 3, mín -5 c) amplitude 5, médio 0, período 6 ($2\pi \div \pi/3$), máx 5, mín -5 d) amplitude 6, médio 10, período 2π , máx 16, mín 4.

3. a) médio = $5 - 4 = 1$, período $2\pi \rightarrow c = 1$: $y = 1 + 4 \sin x$ b) período $\pi \rightarrow c = 2\pi/\pi = 2$: $y = 2 + 3 \sin(2x)$.

4. a) $f(0) = 2 + 3 \times 0 = 2$ b) $f(\pi/2) = 2 + 3 \times 1 = 5$ c) $f(\pi) = 2 + 0 = 2$ d) $f(3\pi/2) = 2 + 3 \times (-1) = -1$ e) máximo 5 (em $x = \pi/2 + 2k\pi$) e mínimo -1 (em $x = 3\pi/2 + 2k\pi$).

5. a) $2\pi \div 3 = 2\pi/3$ b) $2\pi \div (1/2) = 4\pi$ c) tangente: $\pi \div 2 = \pi/2$ d) $2\pi \div \pi = 2$.

6. a) $1 + 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1/2 \rightarrow x = 2\pi/3 \vee x = 4\pi/3$ b) máximo 3 em $x = 0$ (e $x = 2\pi$); mínimo -1 em $x = \pi$.

7. Crescente em $[0, \pi/2]$ e em $[3\pi/2, 2\pi]$; decrescente em $[\pi/2, 3\pi/2]$. Máximo 3 em $x = \pi/2$ e mínimo -3 em $x = 3\pi/2$. (O gráfico de $3 \sin x$ é o de $\sin x$ esticado na vertical, sem alterar o período.)

8. a) V b) F — o cosseno é par ($\cos(-x) = \cos x$) c) F — $\tan(\pi/2)$ não existe ($\cos(\pi/2) = 0$) d) V — $b = 3$ e $a = 2 \rightarrow [2 - 3, 2 + 3] = [-1, 5]$ e) V — $2\pi \div 4 = \pi/2$.

9. a) máximo 5 m e mínimo 1 m b) período 12 h ($2\pi \div \pi/6$) c) $h(0) = 3 + 0 = 3$ m d) $\sin(\pi t/6) = 1 \rightarrow \pi t/6 = \pi/2 \rightarrow t = 3$ h (e de 12 em 12 horas).

10. $\cos x$: $1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot 0$ | $f(x) = 4 - 2 \cos x$: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$. (Máximo 6 quando $\cos x = -1$, mínimo 2 quando $\cos x = 1$.)

11. Partindo de $\sin x$: dilatação vertical de fator 3 (a amplitude passa a 3), deslocamento horizontal de $\pi/2$ para a direita e deslocamento vertical de 2 unidades para cima. Período 2π ($c = 1$) e contradomínio $[2 - 3, 2 + 3] = [-1, 5]$.

12. a) máximo 25 °C quando $\sin(\pi(t-6)/12) = 1 \rightarrow \pi(t-6)/12 = \pi/2 \rightarrow t - 6 = 6 \rightarrow t = 12$ h; mínimo 5 °C em $t = 0$ h ($\sin = -1$) b) $T(6) = 15 + 10 \sin(0) = 15$ °C (o valor médio) c) período = $2\pi \div (\pi/12) = 24$ h.

Nota: num contexto de modelação, identifica sempre o significado de a (valor médio), $|b|$ (amplitude) e do período na situação real — é isso que se pretende avaliar, não apenas a leitura da fórmula.