

Ficha 30 — Funções racionais: $f(x) = a + \frac{b}{(x - c)}$

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Estudar funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$ — domínio, interseções com os eixos, sinal, monotonia e assíntotas — e relacionar o seu gráfico com o da função $1/x$ por transformações.

Revisão rápida — a função $a + \frac{b}{(x - c)}$

- **Domínio:** $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ — o valor que anula o denominador fica de fora (é aí que está a assíntota vertical).
- **Assíntotas:** **vertical** $x = c$ (o gráfico aproxima-se dela quando $x \rightarrow c$, sem a tocar) e **horizontal** $y = a$ (comportamento no infinito: $f(x) \rightarrow a$ quando $x \rightarrow \pm\infty$).
- **Interseções com os eixos:** com Oy calcula-se $f(0)$ (se 0 pertence ao domínio); com Ox resolve-se $f(x) = 0$.
- **Sinal:** reduz-se a uma fração única: $a + \frac{b}{x - c} = \frac{a(x - c) + b}{x - c}$; o sinal obtém-se com um quadro de sinais do numerador e do denominador (atenção: c nunca pertence ao domínio).
- **Monotonia:** se $b > 0$ a função é **decrecente** em cada ramo; se $b < 0$ é **crescente** em cada ramo (nunca é monótona em todo o domínio, pois tem dois ramos separados pela assíntota).
- **Transformações de $1/x$:** $\frac{b}{x - c} + a$ obtém-se a partir de $1/x$ por: translação horizontal de c unidades, **dilatação vertical** de fator |b| (espelhando se $b < 0$) e translação vertical de a unidades.

Exercícios

1. Domínio e assíntotas: para $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$, indica o domínio e as equações das assíntotas vertical e horizontal.

2. Interseções com os eixos: determina os pontos de interseção do gráfico de $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$ com os eixos coordenados.

3. Estudo do sinal: estuda o sinal de $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$, escrevendo-a como fração única e usando um quadro de sinais.

4. Monotonia: justifica que $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$ é decrescente em cada um dos ramos do seu domínio. A função é decrescente em todo o domínio? Explica.

5. Transformações: descreve, por passos, as transformações que levam o gráfico de $y = 1/x$ ao gráfico de $y = 3/(x - 2) + 1$.

6. Assíntotas: indica o domínio e as assíntotas de $g(x) = -1/(x + 2)$.

7. Interseções: determina as interseções de $g(x) = -1/(x + 2) + 1$ com os eixos coordenados.

8. Equação: resolve $2 + 3/(x - 1) = 1$.

9. Inequação: resolve $2 + 3/(x - 1) > 0$, indicando o conjunto-solução.

10. Determinar a expressão: escreve a expressão de uma função do tipo $f(x) = 3 + b/(x + 1)$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$, e indica as suas assíntotas.

11. V/F — corrige as falsas: a) o domínio de $f(x) = a + b/(x - c)$ é $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ · b) a reta $y = a$ é assíntota horizontal · c) se $b > 0$ a função é crescente em cada ramo · d) o gráfico de $f(x) = a + b/(x - c)$, com $b \neq 0$, nunca intersesta a assíntota horizontal · e) $f(x) = 1/x$ tem assíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

12. Problema: o custo médio por peça, em euros, ao produzir x milhares de peças é $C(x) = 4 + 8/(x + 1)$. a) Qual é o custo médio tendencial para produções muito grandes ($x \rightarrow +\infty$)? b) A partir de quantas peças o custo médio não excede 5 € por peça?

Dica: transforma sempre a expressão numa **fração única** antes de estudar o sinal — com duas parcelas é fácil enganar-se. E lembra-te: a assíntota vertical **nunca pertence ao domínio**, por isso nos quadros de sinais a coluna de c fica aberta ($\nexists$).

Soluções — Funções racionais

1. Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Assíntota vertical: $x = 1$; assíntota horizontal: $y = 2$.

2. Com Oy: $f(0) = 2 + 3/(0 - 1) = 2 - 3 = -1 \rightarrow$ ponto **(0, -1)**. Com Ox: $2 + 3/(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3/(x - 1) = -2 \Leftrightarrow x - 1 = -3/2 \Leftrightarrow x = -1/2 \rightarrow$ ponto **(-1/2, 0)**.

3. Fração única: $2 + 3/(x - 1) = [2(x - 1) + 3]/(x - 1) = (2x + 1)/(x - 1)$. Zeros do numerador: $x = -1/2$; zero do denominador: $x = 1$ (excluído). Quadro de sinais: para $x < -1/2$, $(-)/(-) =$ **positivo**; em $]-1/2, 1[$, $(+)/(-) =$ **negativo**; para $x > 1$, $(+)/(+)$ = **positivo**. Logo $f > 0$ em $]-\infty, -1/2[\cup]1, +\infty[$ e $f < 0$ em $]-1/2, 1[$.

4. Como $b = 3 > 0$, em cada ramo a função é **decrecente** (quando x aumenta dentro de um ramo, o valor de $3/(x - 1)$ diminui). **Não** é decrescente em todo o domínio: entre os dois ramos existe a assíntota $x = 1$, e por exemplo $f(0) = -1 < f(2) = 5$ — a função «salta» de $-\infty$ para $+\infty$, pelo que a monotonia só se afirma ramo a ramo.

5. Partindo de $y = 1/x$: (1) **translação horizontal** de 2 unidades para a direita $\rightarrow y = 1/(x - 2)$; (2) **dilatação vertical** de fator 3 $\rightarrow y = 3/(x - 2)$; (3) **translação vertical** de 1 unidade para cima $\rightarrow y = 3/(x - 2) + 1$. Assíntotas finais: $x = 2$ e $y = 1$.

6. Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Assíntota vertical: $x = -2$; assíntota horizontal: $y = 0$ ($a = 0$).

7. Com Oy: $g(0) = -1/(0 + 2) + 1 = -1/2 + 1 = 1/2 \rightarrow$ ponto **(0, 1/2)**. Com Ox: $-1/(x + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 1/(x + 2) = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \rightarrow$ ponto **(-1, 0)**.

8. $2 + 3/(x - 1) = 1 \Leftrightarrow 3/(x - 1) = -1 \Leftrightarrow x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$ (pertence ao domínio $\checkmark$).

9. Usando a fração única: $(2x + 1)/(x - 1) > 0$. Pelo quadro de sinais da questão 3, o quociente é positivo em $]-\infty, -1/2[\cup]1, +\infty[$.

10. $f(0) = 3 + b/(0 + 1) = 3 + b = 1 \rightarrow b = -2$, logo **$f(x) = 3 - 2/(x + 1)$** . Assíntotas: **$x = -1$** (vertical) e **$y = 3$** (horizontal).

11. a) **V** b) **V** c) **F** — se $b > 0$ a função é **decrecente** em cada ramo (crescente é com $b < 0$) d) **V** — como $b \neq 0$, a equação $a + b/(x - c) = a$ não tem solução e) **V**.

12. a) Quando $x \rightarrow +\infty$, $8/(x + 1) \rightarrow 0$, logo $C(x) \rightarrow 4$ € por peça (a assíntota horizontal $y = 4$ é o custo médio mínimo tendencial) b) $C(x) \leq 5 \Leftrightarrow 4 + 8/(x + 1) \leq 5 \Leftrightarrow 8/(x + 1) \leq 1 \Leftrightarrow$ (com $x + 1 > 0$) **$x + 1 \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 7$** . Como x está em milhares de peças, é preciso produzir **7 000 peças** (ou mais).

Nota: sempre que a inequação envolve um denominador, escreve a **fração única** e usa o quadro de sinais — nunca «passes a multiplicar» o denominador sem saber o seu sinal.