

Simulação de Exame — Funções e cálculo diferencial

11.º Ano

Matemática A

10 questões

20 valores

3 páginas

Formato Exame Nacional. Apresenta todos os cálculos e justificações. Nos polinómios mostra Ruffini; nas inequações, o quadro de sinais; nas derivadas identifica a regra usada; quando se pede monotonia ou extremos, constrói o quadro de variação. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Polinómios e funções racionais

1. (2 valores) Divide $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ por $(x - 2)$ e fatoriza o quociente obtido.

2. (2 valores) O resto da divisão de $P(x) = x^3 + kx - 4$ por $(x - 2)$ é 6. Determina o valor de k .

3. (2 valores) Para $f(x) = x^3 - 9x$, determina os zeros e resolve a inequação $f(x) < 0$, apresentando o quadro de sinais.

4. (2 valores) Para $f(x) = 1 + \frac{4}{x + 2}$, indica o domínio, as assíptotas e os pontos de interseção com os eixos coordenados.

Grupo II — Taxas de variação e derivadas

5. (2 valores) Para $f(x) = x^2 + 1$, calcula a taxa média de variação em $[1, 3]$ e a razão incremental em $x = 1$ (simplificada), indicando o limite quando $h \rightarrow 0$.

6. (2 valores) Determina a função derivada de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ e calcula $f'(1)$.

7. (2 valores) Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no ponto de abscissa $x = 4$.

Grupo III — Monotonia, extremos e otimização

8. (2 valores) Para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, estuda a monotonia com quadro de variação e indica os extremos relativos.

9. (2 valores) A soma de dois números positivos é 12. Determina-os de modo que o seu produto seja máximo, indicando esse produto.

10. (2 valores) A posição de um móvel (em metros) ao fim de t segundos é $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, com $t \geq 0$. a) Obtém a função velocidade. b) Indica os instantes em que a velocidade é nula e calcula $v(3)$.

Soluções e critérios de classificação

1. Ruffini com $a = 2$: coeficientes 2, -5, 1, 2 $\rightarrow$ 2, -1, -1, 0. Quociente $2x^2 - x - 1$ e resto 0 (2 é zero de P). Fatorização: $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$, logo $P(x) = (x - 2)(2x + 1)(x - 1)$.

2. Pelo teorema do resto: $P(2) = 8 + 2k - 4 = 4 + 2k = 6 \rightarrow 2k = 2 \rightarrow k = 1$.

3. $f(x) = x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3) \rightarrow$ zeros: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$. Quadro de sinais: $x < -3 \rightarrow$ negativo; $] -3, 0[\rightarrow$ positivo; $] 0, 3[\rightarrow$ negativo; $x > 3 \rightarrow$ positivo. Logo $f(x) < 0$ em $] -\infty, -3[\cup] 0, 3[$.

4. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; assíntota vertical $x = -2$; assíntota horizontal $y = 1$. Com Oy: $f(0) = 1 + 4/2 = 3 \rightarrow (0, 3)$. Com Ox: $1 + 4/(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 4/(x + 2) = -1 \Leftrightarrow x + 2 = -4 \Leftrightarrow x = -6 \rightarrow (-6, 0)$.

5. TMV = $[f(3) - f(1)]/(3 - 1) = (10 - 2)/2 = 4$. Razão incremental em $x = 1$: $[(1 + h)^2 + 1 - 2]/h = (1 + 2h + h^2 - 1)/h = (2h + h^2)/h = 2 + h$; quando $h \rightarrow 0$ tende para 2 (logo $f'(1) = 2$).

6. $f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$; $f'(1) = 4 - 6 + 5 = 3$.

7. $f(4) = 16 - 16 + 3 = 3$; $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(4) = 4$. Reta tangente: $y = 3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 13$.

8. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; zeros: $x = 0$ e $x = 2$. Sinal: $f' > 0$ em $] -\infty, 0[$, $f' < 0$ em $] 0, 2[$ e $f' > 0$ em $] 2, +\infty[$ — f cresce $\nearrow$, decresce $\searrow$ e volta a crescer $\nearrow$. Máximo relativo em $x = 0$: $f(0) = 1$; mínimo relativo em $x = 2$: $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$.

9. Se um número é x , o outro é $12 - x$ (ambos positivos: $0 < x < 12$). O produto é $P(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$. $P'(x) = 12 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 6$, e como P' passa de $+$ para $-$, é máximo. Os números são 6 e 6, com produto máximo 36.

10. a) $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$ b) $v(t) = 0 \Leftrightarrow 6(t^2 - 3t + 2) = 0 \Leftrightarrow 6(t - 1)(t - 2) = 0 \rightarrow t = 1$ s e $t = 2$ s. $v(3) = 6 \times 9 - 18 \times 3 + 12 = 54 - 54 + 12 = 12$ m/s.

CrITÉRIOS: 2 valores por questão — 1,2 valores para o processo (Ruffini, quadro de sinais, derivada, quadro de variação ou modelo) e 0,8 valores para o resultado. Nas questões 3 e 8 não se atribui cotação total sem quadro de sinais/variação. **Nota:** esta simulação treina o formato e o nível de exigência do Exame Nacional no âmbito do 11.º ano; não é uma reprodução de prova oficial.