

Ficha 3 — Equações trigonométricas

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Resolver equações trigonométricas elementares e com argumento composto, escrever soluções gerais e identificar as soluções em intervalos dados.

Revisão rápida — soluções gerais das equações elementares

- **sen $x = k$** (só tem solução se $-1 \leq k \leq 1$): escreve-se $\alpha = \arcsin k$ e $x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
- **cos $x = k$** (só tem solução se $-1 \leq k \leq 1$): com $\alpha = \arccos k$, $x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi$ (por isso se escreve $x = \pm\alpha + 2k\pi$).
- **tg $x = k$** ($k \in \mathbb{R}$, qualquer valor): com $\alpha = \arctg k$, $x = \alpha + k\pi$ — a tangente repete-se a cada *meia volta*, não a cada volta.
- **Solução geral:** acrescenta-se $k\pi$ ou $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) para obter *todas* as soluções em $\mathbb{R}$. Para resolver num intervalo, escreve a solução geral e escolhe os valores de k que lá caem.
- **Argumento composto:** em $\text{sen}(2x) = 1/2$ resolve-se primeiro $2x$, depois divide-se o resultado por 2 — e a periodicidade também é dividida (π passa a $\pi/2$).
- **Antes de resolver:** isola a razão trigonométrica ($2 \text{ sen } x = 1 \rightarrow \text{sen } x = 1/2$) e confirma que o valor está em $[-1, 1]$ no seno e no cosseno.

Equação	Solução geral ($k \in \mathbb{Z}$)
$\text{sen } x = 1/2$	$x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi$
$\cos x = \sqrt{2}/2$	$x = \pi/4 + 2k\pi \vee x = -\pi/4 + 2k\pi$
$\text{tg } x = \sqrt{3}$	$x = \pi/3 + k\pi$
$\text{sen } x = 0 \cdot \cos x = 0$	$x = k\pi \cdot x = \pi/2 + k\pi$

Exercícios

1. Resolve em $\mathbb{R}$ e apresenta a solução geral: a) $\text{sen } x = \sqrt{3}/2$ · b) $\cos x = -1/2$ · c) $\text{tg } x = 1$ · d) $\text{sen } x = -1$.
2. Resolve em $\mathbb{R}$: a) $\cos x = 1/2$ · b) $\text{sen } x = 0$ · c) $\text{tg } x = \sqrt{3}$ · d) $\cos x = 0$.
3. Resolve em $[0, 2\pi[$ (indica as soluções exatas): a) $\text{sen } x = \sqrt{2}/2$ · b) $\cos x = -\sqrt{2}/2$ · c) $\text{tg } x = -1$ · d) $\text{sen } x = 1/2$.

4. Resolve em $[-\pi, \pi]$: a) $\sin x = -1/2$ · b) $\cos x = \sqrt{3}/2$ · c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}/3$.

5. Argumento composto — resolve em $\mathbb{R}$: a) $\sin(2x) = 1/2$ · b) $\cos(2x) = \sqrt{3}/2$ · c) $\operatorname{tg}(2x) = 1$.

6. Resolve em $\mathbb{R}$: a) $\sin(x + \pi/4) = \sqrt{2}/2$ · b) $\cos(x - \pi/3) = 1/2$.

7. Zeros da função: determina, em $\mathbb{R}$, os zeros de: a) $f(x) = \sin x - 1/2$ · b) $g(x) = \cos x + \sqrt{3}/2$.

8. V/F — corrige as falsas: a) A equação $\sin x = 3$ não tem solução · b) $\cos x = 1$ tem como solução $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ · c) $\operatorname{tg} x = 0$ tem como solução $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ · d) $\sin x = 1$ tem como solução $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ · e) A equação $\cos x = k$ tem solução para qualquer valor de k .

9. Isola primeiro e resolve em $\mathbb{R}$: a) $2 \sin x = 1$ · b) $2 \cos x + 1 = 0$ · c) $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$ · d) $\sin^2 x = 1/4$.

10. Completa a tabela:

Equação	Solução geral	Soluções em $[0, 2\pi[$
$\sin x = \sqrt{3}/2$	---	---
$\cos x = -1/2$	---	---
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}/3$	---	---

11. Identifica e corrige o erro na resolução: « $\cos x = \sqrt{3}/2 \rightarrow x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ». Que soluções faltam?

12. Problema: a altura (em metros) de uma cadeira de uma roda-gigante é dada por $h(t) = 10 + 8 \sin(\pi t/6)$, com t em segundos. a) Em que instantes, nos primeiros 12 segundos, a cadeira está a 14 metros de altura? b) E a 10 metros?

Dica: sempre que o valor da razão não é notável, a solução escreve-se com $\arcsin/\arccos/\operatorname{arctg}$. E cuidado com a *periodicidade da tangente*: é $k\pi$, não $2k\pi$.

Soluções — Equações trigonométricas

1. a) $x = \pi/3 + 2k\pi \vee x = 2\pi/3 + 2k\pi$ b) $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($= 2\pi/3 + 2k\pi \vee 4\pi/3 + 2k\pi$) c) $x = \pi/4 + k\pi$ d) $\sin x = -1$ só no ponto $(0; -1)$: $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ ($= -\pi/2 + 2k\pi$).

2. a) $x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ b) $x = k\pi$ (a ordenada anula-se em 0 e π) c) $x = \pi/3 + k\pi$ d) $x = \pi/2 + k\pi$ (a abcissa anula-se no topo e no fundo do círculo).

3. a) $x = \pi/4 \vee x = 3\pi/4$ b) $x = 3\pi/4 \vee x = 5\pi/4$ c) $x = 3\pi/4 \vee x = 7\pi/4$ d) $x = \pi/6 \vee x = 5\pi/6$.

4. a) $x = -\pi/6 \vee x = -5\pi/6$ b) $x = -\pi/6 \vee x = \pi/6$ c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}/3 \rightarrow x = -\pi/6 + k\pi \rightarrow$ em $[-\pi, \pi]$: $x = -\pi/6 \vee x = 5\pi/6$.

5. a) $2x = \pi/6 + 2k\pi \vee 2x = 5\pi/6 + 2k\pi \rightarrow x = \pi/12 + k\pi \vee x = 5\pi/12 + k\pi$ b) $2x = \pm \pi/6 + 2k\pi \rightarrow x = \pm \pi/12 + k\pi$ c) $2x = \pi/4 + k\pi \rightarrow x = \pi/8 + k\pi/2$.

6. a) $x + \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi \vee x + \pi/4 = 3\pi/4 + 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi \vee x = \pi/2 + 2k\pi$ b) $x - \pi/3 = \pm \pi/3 + 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi \vee x = 2\pi/3 + 2k\pi$.

7. a) $\sin x = 1/2 \rightarrow x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi$ b) $\cos x = -\sqrt{3}/2 \rightarrow x = 5\pi/6 + 2k\pi \vee x = 7\pi/6 + 2k\pi$.

8. a) V — $3 > 1$ e o seno nunca passa de 1 b) V c) F — a solução é $x = k\pi$ ($\operatorname{tg} 0 = 0$, e a tangente repete-se a cada π) d) V e) F — no cosseno, como no seno, o valor tem de estar em $[-1, 1]$; para $k = 2$ não há solução.

9. a) $\sin x = 1/2 \rightarrow x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi$ b) $\cos x = -1/2 \rightarrow x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}/3 \rightarrow x = \pi/6 + k\pi$ d) $\sin x = \pm 1/2 \rightarrow x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi \vee x = 7\pi/6 + 2k\pi \vee x = 11\pi/6 + 2k\pi$ (o sinal $\pm$ duplica as famílias de soluções).

10. $\sin x = \sqrt{3}/2$: $x = \pi/3 + 2k\pi \vee x = 2\pi/3 + 2k\pi \rightarrow$ em $[0, 2\pi[$: $\pi/3$ e $2\pi/3$ | $\cos x = -1/2$: $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi \rightarrow 2\pi/3$ e $4\pi/3$ | $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}/3$: $x = \pi/6 + k\pi \rightarrow \pi/6$ e $7\pi/6$.

11. O erro é omitir a solução simétrica: o cosseno tem o *mesmo valor* em $\pi/6$ e em $-\pi/6$. A solução completa é $x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = -\pi/6 + 2k\pi$ (em $[0, 2\pi[$: $x = \pi/6$ e $x = 11\pi/6$). Repetir o valor do arccos só dá *metade* das soluções.

12. a) $10 + 8 \sin(\pi t/6) = 14 \rightarrow \sin(\pi t/6) = 1/2 \rightarrow \pi t/6 = \pi/6 + 2k\pi \vee \pi t/6 = 5\pi/6 + 2k\pi \rightarrow t = 1 + 12k \vee t = 5 + 12k$; nos primeiros 12 s: $t = 1$ s e $t = 5$ s b) $10 + 8 \sin(\pi t/6) = 10 \rightarrow \sin(\pi t/6) = 0 \rightarrow \pi t/6 = k\pi \rightarrow t = 6k$: $t = 0$ s, 6 s e 12 s (a altura média da roda-gigante).

Nota: ao resolver num intervalo, apresenta sempre a solução geral primeiro e só depois seleciona as soluções que pertencem ao intervalo — é o processo mais seguro e o que é pontuado.