

Ficha 33 — Aplicações da derivada: monotonia, extremos e otimização

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Estudar a monotonia e os extremos de uma função a partir do sinal e dos zeros da sua derivada, construir quadros de variação e resolver problemas de otimização em contexto real.

Revisão rápida — sinal da derivada, extremos e otimização

- **Monotonia pelo sinal da derivada:** num intervalo onde $f' > 0$ a função é **crescente**; onde $f' < 0$ é **decrescente**; onde $f' = 0$ em todo o intervalo, é constante.
- **Extremos relativos:** se f' muda de sinal em $x = a$, então a é extremo — passa de **+ para -** $\Rightarrow$ **máximo** relativo; de **- para +** $\Rightarrow$ **mínimo** relativo. Se f' não muda de sinal (por exemplo, $f(x) = x^3$ em $x = 0$), **não há extremo**.
- **Quadro de variação:** junta-se o sinal de f' e a monotonia de f num único quadro, com uma linha para f' (+/0/-) e outra com setas $\nearrow / \searrow$ para f , mais os valores de f nos pontos críticos.
- **Atenção à condição necessária:** $f'(a) = 0$ **não garante** extremo — é apenas um candidato. É preciso estudar a variação de sinal de f' em volta de a .
- **Extremos absolutos num intervalo $[a, b]$:** comparam-se os valores de f nos extremos do intervalo com os valores nos extremos relativos interiores — o maior é o máximo absoluto, o menor o mínimo absoluto.
- **Otimização (receita):** (1) escrever a função objetivo e o domínio com uma só variável; (2) derivar; (3) resolver $f'(x) = 0$; (4) confirmar pelo sinal de f' que é máximo ou mínimo; (5) responder ao problema com **unidades**.

Exercícios

1. Monotonia e extremo: estuda a monotonia de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ pelo sinal de f' e indica o extremo relativo.

2. Cúbica com dois extremos: para $f(x) = x^3 - 3x$, calcula $f'(x)$, estuda o seu sinal e indica os extremos relativos.

3. Extremos: determina os extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

4. Máximo por derivada: mostra que $f(x) = -x^2 + 4x$ tem um máximo relativo em $x = 2$ e indica o seu valor.

5. Quadro de variação: completa o quadro de variação de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x) = 2x - 6$	-		0		+
$f(x)$		↘	---	↗	

6. Sem extremo: estuda a monotonia de $f(x) = x^3$ e explica porque não tem extremos, apesar de $f'(0) = 0$.

7. Extremos absolutos num intervalo: para $f(x) = x^2 - 6x + 5$ em $[0, 5]$, determina o máximo e o mínimo absolutos.

8. Extremos: determina os extremos relativos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

9. Otimização (perímetro): de todos os retângulos com perímetro 20 cm, determina o de área máxima. Indica as suas dimensões e a área.

10. Otimização (volume): da caixa sem tampa construída a partir de um quadrado de cartão de 12 cm de lado (cortando quadrados de lado x nos cantos), sabe-se que $V(x) = x(12 - 2x)^2$, com $0 < x < 6$. Determina o valor de x que maximiza o volume e o volume máximo.

11. V/F — corrige as falsas: a) se $f' > 0$ num intervalo, f é crescente nesse intervalo · b) num extremo relativo de uma função diferenciável tem-se $f' = 0$ · c) $f'(a) = 0$ garante que $x = a$ é extremo relativo · d) se f' passa de + para – em $x = a$, então a é máximo relativo · e) o máximo absoluto de uma função num intervalo fechado pode ocorrer num dos extremos do intervalo.

12. Problema (lucro): o lucro (em milhares de euros) de uma empresa ao produzir x centenas de unidades, para $2 \leq x \leq 5$, é $L(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20$. Determina a produção que maximiza o lucro e o lucro máximo.

Dica: escreve sempre o quadro de variação (sinal de f' e setas de f) antes de concluir sobre extremos — é o processo que mostra o raciocínio e evita confundir um zero de f' com um extremo. Nos problemas de otimização, não esqueças de verificar se o ponto crítico pertence ao domínio do problema.

Soluções — Aplicações da derivada

1. $f'(x) = 2x - 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Para $x < 3$, $f' < 0 \rightarrow f$ **decrescente**; para $x > 3$, $f' > 0 \rightarrow f$ **crescente**. Como f' passa de $-$ para $+$, $x = 3$ é **mínimo relativo**, com $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$; zeros: $x = -1$ e $x = 1$. Sinal: $f' > 0$ em $]-\infty, -1[$, $f' < 0$ em $]-1, 1[$ e $f' > 0$ em $]1, +\infty[$. Logo $x = -1$ é **máximo relativo** ($f(-1) = -1 + 3 = 2$) e $x = 1$ é **mínimo relativo** ($f(1) = 1 - 3 = -2$).
3. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; zeros: $x = 0$ e $x = 2$. Sinal: $f' > 0$ em $]-\infty, 0[$, $f' < 0$ em $]0, 2[$ e $f' > 0$ em $]2, +\infty[$. Logo **máximo relativo** em $x = 0$: $f(0) = 1$; **mínimo relativo** em $x = 2$: $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$.
4. $f'(x) = -2x + 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Para $x < 2$, $f' > 0$ (crescente); para $x > 2$, $f' < 0$ (decrescente) — f' passa de $+$ para $-$, logo $x = 2$ é **máximo relativo**, com $f(2) = -4 + 8 = 4$. (É o vértice da parábola voltada para baixo.)
5. Quadro de variação de $f(x) = x^2 - 6x + 5$: $f' < 0$ em $]-\infty, 3[$ com f decrescente ($\searrow$); $f'(3) = 0$; $f' > 0$ em $]3, +\infty[$ com f crescente ($\nearrow$). No ponto crítico, **$f(3) = -4$** (mínimo).
6. $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$. Como $3x^2 \geq 0$ para todo o x (e só é 0 em $x = 0$), a função é **crescente em $\mathbb{R}$** . Em $x = 0$ temos $f'(0) = 0$, mas f' **não muda de sinal** (é positiva dos dois lados): a tangente é horizontal e a função atravessa-a — é apenas um ponto de derivada nula, **não** um extremo.
7. $f'(x) = 2x - 6 \rightarrow$ ponto crítico $x = 3$ (mínimo relativo, $f(3) = -4$). Extremos do intervalo: $f(0) = 5$ e $f(5) = 25 - 30 + 5 = 0$. Comparando $\{5, -4, 0\}$: o **máximo absoluto é 5** (em $x = 0$) e o **mínimo absoluto é -4** (em $x = 3$).
8. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$; zeros: $x = -1$ e $x = 2$. Sinal: $f' > 0$ em $]-\infty, -1[$, $f' < 0$ em $]-1, 2[$, $f' > 0$ em $]2, +\infty[$. **Máximo relativo** em $x = -1$: $f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$; **mínimo relativo** em $x = 2$: $f(2) = 16 - 12 - 24 = -20$.
9. Se um lado mede x , o outro mede $10 - x$ (perímetro 20), logo a área é $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$, com $0 < x < 10$. $A'(x) = 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Como A' passa de $+$ para $-$, é máximo. O retângulo de área máxima é o **quadrado de 5 cm $\times$ 5 cm**, com **área 25 cm²**.
10. $V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x \rightarrow V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$. Os zeros são $x = 2$ e $x = 6$; como $0 < x < 6$, só $x = 2$ pertence ao domínio. $V' > 0$ em $]0, 2[$ e $V' < 0$ em $]2, 6[$ (12 é positivo e $x - 6 < 0$) $\rightarrow$ **$x = 2$ é máximo**. Volume máximo: $V(2) = 2 \times (12 - 4)^2 = 2 \times 64 = 128$ cm³.
11. a) **V** b) **V** c) **F** — $f'(a) = 0$ apenas indica um *candidato* a extremo; é preciso que f' mude de sinal (contraexemplo: $f(x) = x^3$ em $x = 0$) d) **V** e) **V** — no exercício 7 o máximo absoluto ocorre no extremo $x = 0$ do intervalo.
12. $L'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = -3(x^2 - 6x + 8) = -3(x - 2)(x - 4)$; zeros: $x = 2$ e $x = 4$. Em $]2, 4[$ o produto $(x - 2)(x - 4)$ é negativo, logo $L' > 0$ (crescente); em $]4, 5[$ é positivo, logo $L' < 0$ (decrescente). Assim **$x = 4$ é máximo**. $L(4) = -64 + 144 - 96 + 20 = 4$. Comparando com os extremos do intervalo — $L(2) = 0$ e $L(5) = -125 + 225 - 120 + 20 = 0$ — o lucro máximo é **4 milhares de euros (4 000 €)**, obtido com **400 unidades**.

Nota: a derivada só faz sentido dentro do **domínio do problema** — verifica sempre se o ponto crítico é admissível e apresenta a resposta com as unidades corretas.