

Ficha 32 — Derivada num ponto e regras de derivação

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Interpretar a derivada num ponto como declive da reta tangente, determinar funções derivadas por aplicação das regras de derivação e escrever equações de retas tangentes.

Revisão rápida — derivada e regras

- **Derivada num ponto:** $f'(a)$ é o limite da razão incremental $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quando $h \rightarrow 0$. Geometricamente é o **declive da reta tangente** ao gráfico no ponto $(a, f(a))$.
- **Função derivada:** f' é a função que a cada x faz corresponder $f'(x)$; obtém-se pelas regras de derivação.
- **Reta tangente** em $x = a$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ — passa pelo ponto de tangência e tem declive $f'(a)$.
- **Regras de derivação:** $(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^n)' = n x^{n-1}$, $(c f)' = c f' \cdot (f + g)' = f' + g' \cdot (f \times g)' = f'g + fg' \cdot (u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- **Consequência útil:** $\frac{1}{x}' = -\frac{1}{x^2}$ (e, em geral, $x^{-n} = -n x^{-n-1}$).
- **Tangente horizontal:** $f'(a) = 0$ significa que a reta tangente em $x = a$ é horizontal (candidato a extremo).

Exercícios

1. Regra da potência: determina $f'(x)$ para $f(x) = x^3$ e calcula $f'(2)$.

2. Polinómio: determina a função derivada de $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

3. Constante: indica a derivada de $f(x) = 4$ e explica o resultado geometricamente.

4. Coeficiente: determina a derivada de $f(x) = 7x^4$.

5. Regra do produto: deriva $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$ usando a regra do produto e confirma desenvolvendo primeiro o polinómio.

6. Regra do quociente: deriva $f(x) = (x + 1)/x$ usando a regra do quociente e confirma reescrevendo f como $1 + 1/x$.

7. Caso particular: determina a derivada de $f(x) = 1/x$.

8. Tangente horizontal: para $g(x) = x^2 - 4x$, determina $g'(x)$ e o valor de x em que a reta tangente é horizontal. Calcula também $g'(0)$.

9. Equação da tangente: escreve a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa $x = 3$.

10. Derivada num ponto: para $h(x) = x^3 - 2x$, calcula $h'(x)$ e o valor de $h'(-1)$.

11. V/F — corrige as falsas: a) a derivada num ponto é o declive da reta tangente nesse ponto · b) a derivada de uma função constante é 0 · c) $(f \times g)' = f' \times g' \cdot$ d) a derivada de x^n (n natural) é $n x^{n-1} \cdot$ e) se $f'(a) = 0$ a reta tangente em $x = a$ é horizontal.

12. Problema: a posição de um móvel (metros) ao fim de t segundos é $s(t) = t^2 + 2t$. a) Obtém a função velocidade $v(t) = s'(t)$ e calcula $v(2)$. b) Em que instante a velocidade é 10 m/s? c) Confirma $v(2)$ pela razão incremental.

Dica: antes de derivar um produto ou quociente, verifica se **compensa desenvolver ou simplificar** — $(x^2 + 1)(x - 2)$ e $(x + 1)/x$ resolvem-se mais depressa e com menos erros depois de simplificados. Usa a regra do produto/quociente como confirmação, não como primeira opção.

Soluções — Derivada e regras

1. $f'(x) = 3x^2$ (regra da potência: $n x^{n-1}$ com $n = 3$). $f'(2) = 3 \times 4 = 12$.
2. $f'(x) = 5 \times 2x - 3 = 10x - 3$ (derivada termo a termo; a constante 1 tem derivada 0).
3. $f'(x) = 0$. Geometricamente, o gráfico de $f(x) = 4$ é uma reta horizontal: em qualquer ponto a reta tangente coincide com o próprio gráfico, logo o seu declive é 0.
4. $f'(x) = 7 \times 4x^3 = 28x^3$.
5. Pela regra do produto: $f'(x) = (2x)(x - 2) + (x^2 + 1)(1) = 2x^2 - 4x + x^2 + 1 = 3x^2 - 4x + 1$. Confirmação: $(x^2 + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, cuja derivada é $3x^2 - 4x + 1$ ✓.
6. Regra do quociente com numerador $u = x + 1$ e denominador $v = x$: $u' = 1$ e $v' = 1$, logo $f'(x) = (u'v - uv')/v^2 = (1 \times x - (x + 1) \times 1)/x^2 = (x - x - 1)/x^2 = -1/x^2$. Confirmação: $(x + 1)/x = 1 + 1/x$, e a derivada de 1 é 0, de $1/x$ é $-1/x^2$, dando $-1/x^2$ ✓.
7. $f(x) = 1/x = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1 \times x^{-2} = -1/x^2$.
8. $g'(x) = 2x - 4$. A tangente é horizontal quando $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (é o vértice da parábola). $g'(0) = -4$.
9. $f(3) = 9$ e $f'(x) = 2x \rightarrow f'(3) = 6$. Reta tangente: $y = f(3) + f'(3)(x - 3) = 9 + 6(x - 3) \rightarrow y = 6x - 9$.
10. $h'(x) = 3x^2 - 2$. $h'(-1) = 3 \times 1 - 2 = 1$.
11. a) V b) V c) F — a regra do produto é $(f \times g)' = f'g + fg'$, e não o produto das derivadas d) V e) V.
12. a) $v(t) = s'(t) = 2t + 2$; $v(2) = 4 + 2 = 6$ m/s b) $v(t) = 10 \Leftrightarrow 2t + 2 = 10 \Leftrightarrow t = 4$ s c) Razão incremental em $t = 2$: $[s(2 + h) - s(2)]/h = [(4 + 4h + h^2 + 4 + 2h) - 8]/h = (6h + h^2)/h = 6 + h$, que tende para 6 quando $h \rightarrow 0$ — confirma $v(2) = 6$ m/s.

Nota: escreve sempre a regra que aplicas (potência, produto, quociente) e simplifica o resultado final. Nos problemas de movimento, interpreta a derivada como **velocidade** e indica as unidades.