

Ficha 7 — Declive, inclinação e ângulo entre retas

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Relacionar o declive de uma reta com a sua inclinação, determinar o ângulo entre duas retas com o produto escalar dos vetores diretores e classificar a posição relativa de retas.

Revisão rápida — declive, inclinação e ângulo

- Declive de uma reta** que passa em $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x$. Equação reduzida: $y = m x + b$.
- Vetor diretor** de uma reta de declive m : $u = (1, m)$; um vetor diretor (a, b) corresponde ao declive $m = b/a$ (com $a \neq 0$).
- Inclinação** α é o ângulo que a reta faz com o semieixo positivo Ox , com $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ[$: $m = \text{tg } \alpha$.
- Casos particulares:** reta horizontal $\rightarrow m = 0$ e $\alpha = 0^\circ$; reta vertical $\rightarrow$ declive não definido e $\alpha = 90^\circ$.
- Ângulo entre duas retas:** $\cos \theta = |u \cdot v| / (|u| \times |v|)$, com u e v vetores diretores — o **módulo** garante $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ (é o menor dos ângulos).
- Posição relativa:** mesmo declive $\rightarrow$ paralelas (se b diferente) ou coincidentes (se b igual); declives diferentes $\rightarrow$ concorrentes, e se $m_1 \times m_2 = -1$ são **perpendiculares**.

Declive m	Inclinação α	Exemplo
0	0°	$y = 3$ (horizontal)
1	45°	$y = x$
$\sqrt{3}$	60°	$y = \sqrt{3} x$
-1	135°	$y = -x$
— (não existe)	90°	$x = 2$ (vertical)

Exercícios

- Declive e inclinação: determina o declive e a inclinação da reta que passa em: a) $A(0, 0)$ e $B(2, 2)$ · b) $A(1, 1)$ e $B(3, 1)$ · c) $A(0, 0)$ e $B(1, \sqrt{3})$ · d) $A(1, 2)$ e $B(1, 5)$.
- Escreve a equação reduzida da reta: a) declive 2, que passa em $(0, 3)$ · b) declive -1, que passa em $(2, 1)$ · c) que passa em $A(1, 2)$ e $B(3, 6)$.
- Ângulo entre retas: determina o ângulo (0° a 90°) entre: a) $y = x$ e $y = \sqrt{3} x$ · b) $y = 2x$ e $y = -x/2$ · c) $y = 0$ e $y = \sqrt{3} x$ · d) a reta de vetor diretor $(1, 0)$ e a de vetor diretor $(1, 1)$.

4. Determina o declive m de uma reta: a) perpendicular a $y = 3x + 1$ · b) paralela a $y = 3x + 1$ · c) perpendicular a $y = x$ · d) paralela ao eixo Ox .

5. Posição relativa: classifica cada par de retas (paralelas distintas, coincidentes ou concorrentes — e se perpendiculares): a) $y = 2x + 1$ e $y = 2x - 3$ · b) $y = x + 1$ e $y = -x + 1$ · c) $y = 3x - 2$ e $2y = 6x - 4$.

6. Com coordenadas: a reta r passa em $A(0, 0)$ e $B(1, 3)$; a reta s passa em $C(0, 0)$ e $D(3, -1)$. Determina: a) o declive de cada reta · b) o ângulo entre r e s (1 casa decimal).

7. V/F — corrige as falsas: a) A inclinação de uma reta horizontal é 0° · b) Uma reta vertical tem declive 0 · c) Se $m_1 \times m_2 = -1$, as retas são perpendiculares · d) O declive de uma reta é a tangente da sua inclinação · e) Duas retas com o mesmo declive são sempre coincidentes.

8. Inclinação: indica a inclinação (em graus) da reta: a) $y = x$ · b) $y = \sqrt{3} x$ · c) $y = -x$ · d) $y = 5$.

9. Completa a tabela:

Reta	Declive m	Inclinação α	Vetor diretor
$y = 2x + 1$	---	---	---
$y = -x + 4$	---	---	---
$x = 3$	---	---	---

10. Vetor diretor → declive: determina o declive da reta de vetor diretor: a) (1, 2) · b) (2, 4) · c) (3, -3) · d) (0, 5).

11. Demonstra com o produto escalar que as retas $r: y = 2x$ e $s: y = -x/2$ são perpendiculares (usa os vetores diretores (1, 2) e (2, -1)).

12. Programação (Python): completa o programa para que, dadas as coordenadas de dois pontos de uma reta, calcule o declive e a inclinação (em graus) e verifique se duas retas são perpendiculares. Corrige também o caso da reta vertical.

```
import math

def reta(p, q):
    dx, dy = q[0] - p[0], q[1] - p[1]
    if dx == 0:
        return None, 90.0          # reta vertical
    m = dy / dx
    return m, math.degrees(math.atan(m)) % 180

def perpendiculares(r, s):
    if r[0] is None or s[0] is None:
        return r[0] is None and s[0] == 0
    return abs(r[0] * s[0] + 1) < 1e-9

for nome, p, q in [("r", (0, 0), (1, 1)), ("s", (0, 0), (1, -1)), ("t", (0, 0), (2, 0))]:
    m, a = reta(p, q)
    print(nome, "declive:", m, "inclinacao:", round(a, 1))

print("r e s perpendiculares?", perpendiculares(reta((0, 0), (1, 1)), reta((0, 0), (1, -1))))
```

Soluções — Declive, inclinação e ângulo entre retas

1. a) $m = 2/2 = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$ b) $m = 0/2 = 0 \rightarrow \alpha = 0^\circ$ (horizontal) c) $m = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ$ d) $x_2 - x_1 = 0 \rightarrow$ **declive não definido** e $\alpha = 90^\circ$ (reta vertical).
2. a) $y = 2x + 3$ (b = ordenada na origem) b) $y = -x + b$ e $1 = -2 + b \rightarrow b = 3 \rightarrow y = -x + 3$ c) $m = (6 - 2)/(3 - 1) = 2$; $2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = 0 \rightarrow y = 2x$.
3. a) $\text{tg } 45^\circ = 1$ e $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3} \rightarrow$ ângulo $= 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ b) $m_1 \times m_2 = 2 \times (-1/2) = -1 \rightarrow 90^\circ$ (perpendiculares) c) $y = 0$ tem $\alpha = 0^\circ$ e $y = \sqrt{3}x$ tem $\alpha = 60^\circ \rightarrow 60^\circ$ d) $u = (1, 0)$ e $v = (1, 1)$: $\cos \theta = 1/(1 \times \sqrt{2}) = \sqrt{2}/2 \rightarrow 45^\circ$.
4. a) $m_1 \times m_2 = -1 \rightarrow m = -1/3$ b) mesmo declive $\rightarrow m = 3$ c) $m = -1$ d) paralela ao eixo Ox $\rightarrow m = 0$.
5. a) $m = 2$ nas duas e ordenadas na origem diferentes ($1 \neq -3$) $\rightarrow$ **paralelas distintas** b) $1 \times (-1) = -1 \rightarrow$ **concorrentes e perpendiculares** c) $2y = 6x - 4 \Leftrightarrow y = 3x - 2$, exatamente a mesma reta $\rightarrow$ **coincidentes**.
6. a) r: $m = (3 - 0)/(1 - 0) = 3$; s: $m = (-1 - 0)/(3 - 0) = -1/3$ b) $3 \times (-1/3) = -1$, logo as retas são perpendiculares $\rightarrow \theta = 90^\circ$.
7. a) **V** b) **F** — uma reta vertical tem declive **não definido** (não é 0) c) **V** d) **V** ($m = \text{tg } \alpha$) e) **F** — podem ser **paralelas distintas**, se as ordenadas na origem forem diferentes.
8. a) $m = 1 \rightarrow 45^\circ$ b) $m = \sqrt{3} \rightarrow 60^\circ$ c) $m = -1 \rightarrow 135^\circ$ d) $m = 0 \rightarrow 0^\circ$.
9. $y = 2x + 1$: $m = 2$, $\alpha = 63,4^\circ$, diretor **(1, 2)** | $y = -x + 4$: $m = -1$, $\alpha = 135^\circ$, diretor **(1, -1)** | $x = 3$: m **não definido**, $\alpha = 90^\circ$, diretor **(0, 1)**.
10. a) $m = 2/1 = 2$ b) $m = 4/2 = 2$ (o vetor (2, 4) é paralelo a (1, 2), define a mesma direção) c) $m = -3/3 = -1$ d) $a = 0 \rightarrow$ **declive não definido** (retângulo vertical).
11. Os vetores diretores são $u = (1, 2)$ e $v = (2, -1)$. $u \cdot v = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0$. Como o produto escalar é nulo e nenhum vetor é nulo, $u \perp v$, logo as retas são **perpendiculares** (o que confirma $m_1 \times m_2 = 2 \times (-1/2) = -1$).
12. O programa está correto: para r, (0,0) e (1,1) dão $m = 1$ e $\alpha = 45,0^\circ$; para s, $m = -1$ e $\alpha = 135,0^\circ$; para t, $m = 0$ e $\alpha = 0,0^\circ$. A verificação devolve **True**, porque $1 \times (-1) + 1 = 0$. A proteção *is None* trata a reta vertical (sem declive) e o caso vertical/horizontal, em que a comparação de declives falharia.

Nota: o ângulo entre retas usa o *módulo* do produto escalar, porque o ângulo entre retas é, por convenção, o menor dos dois (nunca superior a 90°).