

Ficha 28 — Funções cúbicas e quárticas

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Analisar funções polinomiais de grau 3 e 4 — zeros, monotonia, extremos e comportamento no infinito — escrever a expressão analítica a partir dos zeros e resolver equações e inequações de grau até 4.

Revisão rápida — cúbicas e quárticas

- **Comportamento no infinito** (só depende do termo de maior grau): grau **ímpar** com coeficiente positivo $\rightarrow -\infty$ em $-\infty$ e $+\infty$ em $+\infty$ (sobe sempre de extremo a extremo); grau **ímpar** com coeficiente negativo $\rightarrow$ o contrário; grau **par** $\rightarrow$ o mesmo sinal nos dois extremos ($+\infty$ se o coeficiente de maior grau é positivo).
- **Grau ímpar $\Rightarrow$ pelo menos um zero real**: uma função cúbica tem sempre 1, 2 ou 3 zeros reais (e no máximo 3); uma quártica tem 0, 1, 2, 3 ou 4 zeros reais (e no máximo 4).
- **Teorema de Bolzano (uso intuitivo)**: se f é contínua e $f(a)$ e $f(b)$ têm **sinais contrários**, existe pelo menos um zero em $]a, b[$.
- **Expressão a partir do gráfico**: com zeros z_1, z_2, z_3 lê-se $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$; o valor de a determina-se com a ordenada na origem (ou outro ponto conhecido).
- **Multiplicidade e gráfico**: zero de multiplicidade **ímpar** $\rightarrow$ o gráfico *atravessa* o eixo Ox ; multiplicidade **par** $\rightarrow$ é *tangente* e inverte o sentido.
- **Equações e inequações**: fatorizar, marcar os zeros na reta real, estudar o sinal de cada fator e fazer o **quadro de sinais**. Em polinómios «em x^2 » (como $x^4 - 5x^2 + 4$) substitui-se $t = x^2$ para fatorizar.

Exercícios

1. Comportamento no infinito: indica $\lim f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ para a) $f(x) = x^3 - 3x$ b) $g(x) = -x^3 + x^2$.

2. Zeros: determina os zeros de $f(x) = x^3 - 4x$ por fatorização.

3. Multiplicidade: fatoriza $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e indica os zeros e a respetiva multiplicidade. O gráfico é tangente ao eixo Ox em algum ponto?

4. Existência de zero: mostra que a equação $x^3 + 2x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução real, indicando um intervalo onde ela se encontra.

5. Monotonia e extremos (por tabela): para $f(x) = x^3 - 3x$, completa a tabela e indica os extremos relativos.

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	---	---	---	---	---

6. Quártica: para $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$: a) fatoriza (sugestão: $t = x^2$) · b) indica os zeros · c) indica o comportamento no infinito.

7. Expressão a partir do gráfico: uma função cúbica tem zeros em $x = -1$, $x = 1$ e $x = 3$ e passa no ponto $(0, 3)$. Escreve a sua expressão analítica na forma fatorizada e desenvolvida.

8. Equação: resolve $x^3 - 4x = 0$.

9. Inequação cúbica: resolve $x^3 - 4x > 0$, apresentando o quadro de sinais e o conjunto-solução.

10. Inequação quártica: resolve $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

11. V/F — corrige as falsas: a) uma função cúbica pode não ter zeros reais · b) uma quártica pode ter quatro zeros reais · c) se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, a função tem um zero em $]a, b[$ · d) um zero de multiplicidade par implica que o gráfico atravessa o eixo Ox · e) numa cúbica com coeficiente positivo de x^3 , $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$.

12. Problema: de um quadrado de cartão com 12 cm de lado cortam-se quadrados de lado x em cada canto e dobram-se as abas para formar uma caixa sem tampa. a) Escreve o volume $V(x)$ em função de x . b) Indica o domínio da função (valores admissíveis de x).

Dica: para resolver equações e inequações de grau 3 ou 4, **fatoriza sempre primeiro**: procura fator comum, usa a substituição $t = x^2$ nas expressões só com potências pares, e aplica o teorema do resto para encontrar um zero antes de dividir por Ruffini. Só depois constróis o quadro de sinais.

Soluções — Funções cúbicas e quárticas

1. a) Só o termo de maior grau importa: $f(x) = x^3 - 3x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $-\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$ (grau ímpar, coeficiente positivo) b) $g(x) = -x^3 + x^2 \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $+\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$ (o coeficiente de x^3 é negativo).

2. $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) \rightarrow$ zeros: $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$.

3. $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2 \rightarrow$ zeros: $x = 0$ (multiplicidade 1) e $x = 2$ (multiplicidade 2). Como o zero 2 tem multiplicidade **par**, o gráfico é **tangente** ao eixo Ox no ponto (2, 0) (toca e não atravessa).

4. Seja $h(x) = x^3 + 2x + 1$. Então $h(-1) = -1 - 2 + 1 = -2 < 0$ e $h(0) = 1 > 0$. Como h é contínua e muda de sinal, existe pelo menos um zero no intervalo $]-1, 0[$.

5. $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$. Há um **máximo relativo** em $x = -1$ (valor 2) e um **mínimo relativo** em $x = 1$ (valor -2); a função cresce até -1, decresce entre -1 e 1 e volta a crescer depois de 1.

6. a) Com $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) \rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ b) zeros: $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$ c) grau par com coeficiente positivo $\rightarrow +\infty$ nos dois extremos ($x \rightarrow \pm\infty$).

7. Forma fatorizada: $f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3)$. Com o ponto (0, 3): $f(0) = a(1)(-1)(-3) = 3a = 3 \rightarrow a = 1$. Logo $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ e, desenvolvendo, $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

8. $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$, $x = 0$ ou $x = 2$.

9. $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$. Quadro de sinais (zeros -2, 0, 2): para $x < -2$ o produto é negativo; em $]-2, 0[$ é positivo; em $]0, 2[$ é negativo; em $]2, +\infty[$ é positivo. Conjunto-solução: $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$.

10. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. O produto é negativo quando um fator é negativo e o outro positivo: $x^2 - 1 < 0 < x^2 - 4 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < |x| < 2$. Conjunto-solução: $x \in]-2, -1[\cup]1, 2[$.

11. a) **F** — grau ímpar garante **pelo menos um** zero real (uma cúbica tem 1, 2 ou 3) b) **V c) V** — é o uso intuitivo do teorema de Bolzano (com f contínua) d) **F** — multiplicidade **par** $\Rightarrow$ o gráfico é **tangente** (não atravessa); quem atravessa é a multiplicidade ímpar e) **V** — cúbica com coeficiente positivo sobe de $-\infty$ para $+\infty$.

12. a) A base da caixa mede $12 - 2x$ em cada lado e a altura é x : $V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ (cm³) b) Para a caixa existir é preciso $12 - 2x > 0$ e $x > 0$, logo o domínio é $0 < x < 6$.

Nota: apresenta sempre a fatorização completa antes de tirar conclusões de sinal — e, nas inequações, escreve o quadro de sinais: é o processo que mostra o raciocínio e que é cotado.