

Teste de Matemática — Introdução à contagem

11.º Ano

Matemática A

10 questões

20 valores

3 páginas

Instruções: em cada questão apresenta a *fórmula* que usas (n^k , nA_k , $n!$ ou nC_k) e justifica a escolha com a pergunta «a ordem conta?» e «há repetição?». Calculadora não é necessária. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Princípios de contagem

1. (2 valores) Um restaurante tem 4 entradas, 6 pratos principais e 3 sobremesas. Quantas refeições diferentes (uma entrada, um prato e uma sobremesa) se podem compor? Que princípio usaste?

2. (2 valores) Códigos de 5 dígitos (0 a 9): a) quantos existem com repetição permitida? b) e sem repetição?

3. (2 valores) Numa corrida participam 10 atletas. Quantas classificações diferentes são possíveis para os três primeiros lugares?

4. (2 valores) a) De quantas formas se podem ordenar 7 livros diferentes numa estante? b) E se 3 desses livros forem iguais entre si?

Grupo II — Arranjos, permutações e combinações

5. (2 valores) De um grupo de 12 alunos escolhe-se uma comissão de 4 elementos, sem cargos atribuídos. Quantas comissões diferentes se podem formar? Explica porque não usas arranjos.

6. (2 valores) Calcula a) $8! / 6! \cdot b$ e simplifica $n! / (n - 1)!$, com $n \geq 1$.

7. (2 valores) Desenvolve $(x - 1)^4$, apresentando os coeficientes.

Grupo III — Pascal, binómio e problemas

8. (2 valores) Determina o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(x + 2)^5$.

9. (2 valores) Usando a relação de Pascal e os valores ${}^6C_2 = 15$ e ${}^6C_3 = 20$, calcula 7C_3 .

10. (2 valores) Num grupo há 5 rapazes e 4 raparigas. Quantas comissões de 3 pessoas se podem formar com *pelo menos* uma rapariga?

Fim da prova. Total: 20 valores.

Soluções e critérios de classificação

1. (2 v) $4 \times 6 \times 3 = 72$ refeições. Usa-se o **princípio da multiplicação**: as escolhas fazem-se em série (entrada e prato e sobremesa).
2. (2 v) a) $10^5 = 100\,000$ códigos (arranjo completo) b) ${}^{10}A_6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$ códigos (arranjo simples).
3. (2 v) ${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ classificações (a ordem conta e o mesmo atleta não pode ocupar dois lugares).
4. (2 v) a) $7! = 5\,040$ arrumações b) $7! / 3! = 5\,040 / 6 = 840$ arrumações (cada arrumação é contada 3! vezes por causa dos livros iguais).
5. (2 v) ${}^{12}C_4 = 12! / (4! \times 8!) = (12 \times 11 \times 10 \times 9) / 24 = 11\,880 / 24 = 495$ comissões. Não se usam arranjos porque a comissão não tem cargos: a **ordem não é relevante** (a mesma terna de alunos forma uma única comissão).
6. (2 v) a) $8! / 6! = 8 \times 7 = 56$ b) $n! / (n-1)! = n \times (n-1)! \div (n-1)! = n$.
7. (2 v) $(x-1)^4 = {}^4C_0x^4 + {}^4C_1x^3(-1) + {}^4C_2x^2(-1)^2 + {}^4C_3x(-1)^3 + {}^4C_4(-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ (coeficientes 1, -4, 6, -4, 1, com sinais alternados).
8. (2 v) $T_{(k+1)} = {}^6C_k \times x^{(6-k)} \times 2^k$. Para x^3 : $5-k=3 \rightarrow k=2$. Coeficiente: ${}^6C_2 \times 2^2 = 10 \times 4 = 40$.
9. (2 v) ${}^7C_3 = {}^6C_2 + {}^6C_3 = 15 + 20 = 35$ (relação de Pascal).
10. (2 v) Total de comissões: ${}^9C_3 = 84$. Sem raparigas: ${}^5C_3 = 10$. Logo, pelo menos uma rapariga: $84 - 10 = 74$ comissões (contagem pelo complementar).

Crítérios: em cada questão a cotação reparte-se pelo *processo* (escolha e escrita da fórmula correta, com a identificação do princípio) e pelo *resultado*. Nas questões 5, 2 e 10 é exigida a justificação escrita (ordem não relevante; repetição permitida ou não; uso do complementar). Resultados corretos sem fórmula identificada perdem metade da cotação.