

Resumo — Introdução à contagem

11.º Ano

Matemática A

2 páginas

O que este resumo cobre: os princípios da multiplicação e da adição, o fatorial, os arranjos completos e simples, as permutações, as combinações, o triângulo de Pascal e o binómio de Newton — com uma tabela de decisão para escolher a fórmula certa.

1. Os dois princípios fundamentais

- **Princípio da multiplicação:** tarefas realizadas *em série* (fazer isto e aquilo) com $m_1, m_2, \dots, m_k$ alternativas $\rightarrow m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$. Exemplo: 4 camisolas, 3 calças e 2 pares de sapatos $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras de vestir.
- **Princípio da adição:** casos repartidos em grupos *disjuntos* (ou) com $n_1, n_2, \dots$ casos $\rightarrow n_1 + n_2 + \dots$. Exemplo: 5 $\times$ 3 = 15 percursos via B ou 2 percursos diretos $\rightarrow 17$ percursos.
- **Instrumentos de organização:** o *diagrama em árvore* representa cada caso como um caminho; a *tabela de dupla entrada* conta pares ordenados (ex.: os 36 resultados de dois dados).
- **Fatorial:** $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, com $0! = 1$ e $1! = 1$. Conta as ordenações de n objetos distintos.
- **Princípio do pombo:** se n objetos se distribuem por m gavetas e $n > m$, alguma gaveta recebe **pelo menos 2** objetos (ex.: 13 alunos e 12 meses $\rightarrow$ há sempre dois no mesmo mês).

2. Arranjos e permutações (a ordem conta)

- **Arranjo completo** — n elementos, k posições, **repetição permitida** $\rightarrow n^k$. Exemplo: códigos de 4 dígitos $= 10^4 = 10\,000$.
- **Arranjo simples** — n elementos, k posições, **sem repetição** $\rightarrow {}^nA_k = n! / (n - k)! = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$. Exemplo: pódio de 8 atletas $= {}^8A_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
- **Permutação** — ordenar todos os n elementos distintos $\rightarrow n!$ (é o arranjo simples com $k = n$). Exemplo: 6 livros $= 6! = 720$.
- **Permutação com elementos repetidos** — n elementos com grupos de iguais de tamanhos $p, q, \dots \rightarrow n! / (p! \times q! \times \dots)$. Exemplo: anagramas de BANANA $= 6! / (3! \times 2!) = 60$.
- **Restrições:** trata primeiro a posição mais restrita. Num número de 3 algarismos, o 1.º tem 9 hipóteses (não pode ser 0) e cada seguinte perde uma se não houver repetição: $9 \times 9 \times 8 = 648$.

3. Combinações (a ordem não conta)

- **Combinação:** escolher k elementos distintos de n **sem a ordem contar** $\rightarrow {}^nC_k = n! / (k! \times (n - k)!)$. Exemplo: comissão de 3 alunos entre 10 $= {}^{10}C_3 = 120$.
- **Relação com os arranjos:** cada combinação dá origem a $k!$ arranjos $\rightarrow {}^nC_k = {}^nA_k / k!$ (ex.: ${}^8C_3 = 336 / 6 = 56$).
- **Propriedades:** ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$, ${}^nC_1 = n$ e a **simetria** ${}^nC_k = {}^nC_{(n-k)}$ (escolher 3 é o mesmo que deixar de fora 7: ${}^{10}C_3 = {}^{10}C_7 = 120$).
- **Grupos separados:** multiplicam-se as combinações de cada grupo (6 rapazes e 4 raparigas, comissões com 2 rapazes e 1 rapariga $= {}^6C_2 \times {}^4C_1 = 60$).
- **«Pelo menos um»:** conta-se o *complementar* e subtrai-se ao total (comissões com pelo menos uma rapariga $= {}^{10}C_3 - {}^6C_3 = 120 - 20 = 100$).

4. Tabela de decisão — que fórmula usar?

Situação	Repetição	Ordem conta?	Fórmula
Arranjo completo	sim	sim	n^k
Arranjo simples	não	sim	$n! / (n - k)!$
Permutação	não (usa todos)	sim	$n!$
Permutação com repetidos	grupos iguais	sim	$n! / (p! q! \dots)$
Combinação	não	não	$n! / (k! (n - k)!)$

Palavras-sinal: «código», «senha», «pódio», «classificação», «cargos», «anagrama» → a ordem conta (arranjo ou permutação). «Comissão», «grupo», «conjunto», «cartas na mão», «seleção» → a ordem não conta (combinação).

5. Triângulo de Pascal

- Cada linha começa e termina em 1 e cada número é a soma dos dois que estão imediatamente acima: ${}^nC_k = {}^{(n-1)}C_{(k-1)} + {}^{(n-1)}C_k$.
- A linha n tem $n + 1$ elementos e a soma de todos os elementos da linha n é 2^n (linha 3: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$).
- Aplicação: ${}^6C_3 = {}^5C_2 + {}^5C_3 = 10 + 10 = 20$.

6. Binómio de Newton

- Desenvolvimento:** $(a + b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{(n-1)}b + {}^nC_2a^{(n-2)}b^2 + \dots + {}^nC_nb^n$ — tem $n + 1$ termos.
- Termo geral:** $T_{(k+1)} = {}^nC_k \times a^{(n-k)} \times b^k$ (o índice k começa em 0).
- Coefficientes:** são os números da linha n do triângulo de Pascal; a sua soma é 2^n (fazer $a = b = 1$).
- Exemplo: $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Exemplo de coeficiente: em $(2x + 1)^5$, o coeficiente de x^4 é ${}^5C_1 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$.

7. Erros frequentes e controlo

Atenção: somar quando se deve multiplicar (as etapas são independentes e fazem-se *todas*); usar arranjos em situações em que a ordem não conta (e obter $k!$ vezes o resultado correto); esquecer que num número o primeiro algarismo não pode ser 0; contar «pelo menos um» diretamente em vez de usar o complementar; e trocar a parcela do termo geral (usar $a^{(n-k)}b^k$ em vez de $a^kb^{(n-k)}$).

Controlo em 3 passos: (1) pergunta «pode haver repetição?»; (2) pergunta «a ordem interessa?» — as duas respostas escolhem a fórmula na tabela; (3) faz um teste rápido com n e k pequenos (listar 2 ou 3 casos à mão) para confirmar que a fórmula dá o mesmo número.