

Ficha 15 — Princípios de contagem

11.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Usar o princípio da multiplicação e o princípio da adição para contar casos, apoiar-me em diagramas em árvore e tabelas, calcular fatoriais e aplicar o princípio do pombo a situações concretas.

Revisão rápida — os dois princípios e o fatorial

- **Princípio da multiplicação (etapas em série):** se uma tarefa se realiza em etapas com $m_1, m_2, \dots, m_k$ alternativas independentes, o número total de maneiras é $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$. Ligação a «e» (fazer isto e aquilo).
- **Princípio da adição (alternativas em paralelo):** se os casos se repartem em grupos disjuntos com $n_1, n_2, \dots$ casos, o total é $n_1 + n_2 + \dots$. Ligação a «ou».
- **Diagrama em árvore e tabela:** instrumentos para *organizar* a contagem — cada caminho da árvore é um caso, e a tabela de dupla entrada conta pares ordenados.
- **Fatorial:** $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, com $0! = 1$ e $1! = 1$. Conta as ordenações de n objetos distintos.
- **Princípio do pombo:** se se distribuem n objetos por m gavetas e $n > m$, então **alguma gaveta recebe pelo menos 2 objetos**.

Exercícios

1. Calcula o número de maneiras de vestir, escolhendo 4 camisolas, 3 pares de calças e 2 pares de sapatos. Que princípio usaste?

2. Código de 4 dígitos (0 a 9): a) quantos códigos existem se os dígitos podem repetir-se? b) e se não puderem repetir-se?

3. Matrícula formada por 2 letras (26 possíveis) seguidas de 4 dígitos, com repetição permitida. Quantas matrículas diferentes se podem formar?

4. Menu: um restaurante tem 3 entradas, 5 pratos principais e 4 sobremesas. Quantas refeições diferentes (uma entrada, um prato e uma sobremesa) se podem compor?

5. Adição + multiplicação: para ir de A a C pode seguir-se por B (com 5 caminhos de A para B e 3 de B para C) ou ir diretamente (2 caminhos diretos). Quantos percursos diferentes existem de A a C?

6. Fatorial: calcula a) $5!$ · b) $6! / 4!$ · c) simplifica $n! / (n-2)!$, com $n \geq 2$.

7. Ordenações: a) de quantas formas se podem ordenar 5 livros diferentes numa prateleira? b) e se dois desses livros forem iguais entre si?

8. Senha com restrição: uma senha tem 3 letras distintas (de um alfabeto de 26) seguidas de 3 dígitos (0 a 9, com repetição). Quantas senhas diferentes existem?

9. Princípio do pomal: numa turma há 13 alunos. Justifica que pelo menos dois alunos fazem anos no mesmo mês.

10. Tabela de dupla entrada: lançam-se dois dados. a) quantos resultados (pares ordenados) são possíveis? b) quantos têm soma 7? c) quantos têm soma maior ou igual a 10?

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

11. V/F — corrige as falsas: a) se uma tarefa tem 3 etapas de 4 alternativas cada, existem 12 maneiras · b) $0! = 0$ · c) «ou» associa-se ao princípio da adição · d) $6! = 720$ · e) o princípio do pomal garante que a gaveta mais cheia tem exatamente 2 objetos.

12. (Python) Escreve um programa que conte quantos números de 3 algarismos têm os três algarismos distintos. Compara o resultado com o valor previsto pelo princípio da multiplicação.

```
total = 0
for n in range(100, 1000):
    a, b, c = str(n)
    if a != b and b != c and a != c:
        total += 1
print(total)
```

Dica: identifica primeiro se os passos acontecem *em série* (multiplicas) ou se são *alternativas* (somam-se). Em problemas com restrições, trata primeiro a posição mais restrita — por exemplo, num número de 3 algarismos o primeiro nunca pode ser 0.

Soluções — Princípios de contagem

1. $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras. Usou-se o princípio da multiplicação (as escolhas fazem-se *em série*: camisola e calças e sapatos).

2. a) $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ códigos b) $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ códigos.

3. $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^2 \times 10^4 = 6\,760\,000$ matrículas.

4. $3 \times 5 \times 4 = 60$ refeições.

5. Via B: $5 \times 3 = 15$ percursos. Diretamente: 2. Total: $15 + 2 = 17$ percursos (multiplicação dentro de cada alternativa, adição entre alternativas).

6. a) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ b) $6! / 4! = (720 / 24) = 30 = 6 \times 5$ c) $n! / (n-2)! = n \times (n-1) \times (n-2)! \div (n-2)! = n(n-1)$.

7. a) $5! = 120$ ordenações b) com dois livros iguais, cada ordenação conta-se duas vezes: $5! / 2! = 120 / 2 = 60$ ordenações.

8. $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 10 \times 10 = 15\,600 \times 1\,000 = 15\,600\,000$ senhas. As letras não repetem (26, 25, 24), os dígitos sim (10 em cada posição).

9. Há 12 meses possíveis («gavetas») e 13 alunos («objetos»). Como $13 > 12$, pelo princípio do pombo **algum mês recebe pelo menos 2 alunos** — ou seja, existem sempre dois alunos que fazem anos no mesmo mês.

10. a) $6 \times 6 = 36$ pares ordenados b) soma 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) → 6 resultados c) soma ≥ 10 : (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6) → 6 resultados (confirma-se na diagonal da tabela).

11. a) **F** — $4 \times 4 \times 4 = 64$ maneiras (multiplica-se, não se soma) b) **F** — $0! = 1$ (há uma única forma de ordenar zero objetos) c) **V** d) **V** e) **F** — garante apenas que **pelo menos 2** objetos ficam na mesma gaveta; podem ficar mais.

12. Previsão: o 1.º algarismo tem 9 hipóteses (1 a 9), o 2.º tem 9 (todos menos o 1.º) e o 3.º tem $8 \rightarrow 9 \times 9 \times 8 = 648$ números. O programa confirma: imprime **648** — a contagem por enumeração coincide com a previsão do princípio da multiplicação.

Nota: em cada exercício, escreve sempre o *produto* ou a *soma* que justifica o resultado — a pontuação está na identificação do princípio, não apenas no número final.