

Ficha 17 — Combinações e binómio de Newton

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Reconhecer situações em que a ordem *não* importa, calcular combinações, usar o triângulo de Pascal e aplicar o binómio de Newton para desenvolver potências e determinar coeficientes.

Revisão rápida — combinações e binómio

- Combinação:** escolher k elementos distintos de um conjunto de n , sem repetição e **sem a ordem contar** $\rightarrow {}^nC_k = n! / (k! \times (n - k)!)$.
- Relação com os arranjos:** cada combinação dá origem a $k!$ arranjos $\rightarrow {}^nC_k = {}^nA_k / k!$.
- Propriedades:** ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1 \cdot {}^nC_1 = n \cdot {}^nC_k = {}^nC_{(n-k)}$ (simetria).
- Triângulo de Pascal:** cada número é a soma dos dois de cima $\rightarrow {}^nC_k = {}^{(n-1)}C_{(k-1)} + {}^{(n-1)}C_k$.
- Binómio de Newton:** $(a + b)^n = \sum {}^nC_k \times a^{(n-k)} \times b^k$, com **termo geral** $T_{(k+1)} = {}^nC_k \times a^{(n-k)} \times b^k$. O desenvolvimento tem **$n + 1$ termos** e a soma dos coeficientes é 2^n .

Ordem	Conta?	Fórmula	Exemplo
Arranjo simples	sim	$n! / (n - k)!$	pódio, cargos distintos
Combinação	não	$n! / (k! (n - k)!)$	comissões, grupos, cartas na mão

Exercícios

1. Arranjo ou combinação? Classifica cada situação (sem calcular): a) escolher 3 alunos de uma turma para uma comissão · b) a classificação dos 3 primeiros num concurso · c) receber 5 cartas de um baralho · d) formar um código de 3 dígitos.

2. Calcula: a) ${}^5C_2 \cdot {}^8C_3 \cdot {}^10C_{10}$ · b) ${}^8C_3 \cdot {}^10C_{10}$ · c) ${}^10C_{10}$ · d) 8C_0 .

3. Comissão: de um grupo de 10 alunos escolhem-se 3 para uma comissão (sem cargos atribuídos). Quantas comissões diferentes se podem formar?

4. Relação arranjo/combinção: usa ${}^8A_3 = 336$ para calcular 8C_3 . Explica o raciocínio.

5. Simetria: calcula ${}^{10}C_3$ e ${}^{10}C_7$, e comenta o resultado.

6. Pascal: usando a relação de Pascal e os valores ${}^5C_2 = 10$ e ${}^5C_3 = 10$, calcula 6C_3 .

7. Desenvolve: $(x + 2)^3$.

8. Termo geral: determina o coeficiente de x^9 no desenvolvimento de $(x^2 + 1/x)^6$.

9. Coeficiente: determina o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(2x + 1)^5$.

10. Soma dos coeficientes: no desenvolvimento de $(a + b)^6$, indica a) o número de termos · b) a soma de todos os coeficientes. Justifica.

11. V/F — corrige as falsas: a) ${}^7C_2 = {}^7A_2$ · b) ${}^5C_5 = 1$ · c) numa combinação a ordem dos elementos não é relevante · d) o desenvolvimento de $(a + b)^5$ tem 5 termos · e) ${}^9C_4 = {}^9C_5$.

12. Problema: num grupo há 6 rapazes e 4 raparigas. a) Quantas comissões de 3 pessoas com *exatamente* 2 rapazes e 1 rapariga se podem formar? b) Quantas comissões de 3 pessoas têm *pelo menos* uma rapariga?

Dica: em problemas com *grupos separados* (rapazes/raparigas, cartas de naipes, etc.), multiplica as combinações de cada grupo. Quando aparecer «pelo menos um», é quase sempre mais rápido contar o *complementar* e subtrair ao total.

Soluções — Combinações e binómio de Newton

1. a) **Combinação** (a comissão não tem cargos: a ordem não importa) b) **Arranjo** (1.º, 2.º e 3.º lugares são distintos) c) **Combinação** (as 5 cartas formam um conjunto) d) **Arranjo** (a ordem dos dígitos dá códigos diferentes).

2. a) ${}^5C_2 = 5 \times 4 / 2 = 10$ b) ${}^8C_3 = (8 \times 7 \times 6) / 3! = 336 / 6 = 56$ c) ${}^{10}C_{10} = 1$ d) ${}^6C_0 = 1$.

3. ${}^{10}C_3 = 10! / (3! \times 7!) = (10 \times 9 \times 8) / 6 = 720 / 6 = 120$ **comissões**.

4. Cada combinação agrupa $3! = 6$ arranjos (as 6 ordens possíveis dos mesmos 3 alunos). Logo ${}^8C_3 = {}^8A_3 / 3! = 336 / 6 = 56$.

5. ${}^{10}C_3 = (10 \times 9 \times 8) / 6 = 120$ e ${}^{10}C_7 = 10! / (7! \times 3!) = 120$. São iguais porque escolher 3 é o mesmo que *deixar de fora* 7: ${}^nC_k = {}^nC_{(n-k)}$.

6. ${}^6C_3 = {}^5C_2 + {}^5C_3 = 10 + 10 = 20$ (relação de Pascal).

7. $(x + 2)^3 = {}^3C_0x^3 + {}^3C_1x^2 \cdot 2 + {}^3C_2x \cdot 2^2 + {}^3C_3 \cdot 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

8. $T_{(k+1)} = {}^6C_k \times (x^2)^{(6-k)} \times (1/x)^k = {}^6C_k \times x^{12-3k}$. Para obter x^9 : $12 - 3k = 9 \rightarrow k = 1$. O coeficiente é ${}^6C_1 = 6$ (o termo é $6x^9$).

9. $T_{(k+1)} = {}^5C_k \times (2x)^{(5-k)} \times 1^k = {}^5C_k \times 2^{(5-k)} \times x^{(5-k)}$. Para x^4 : $5 - k = 4 \rightarrow k = 1$. Coeficiente: ${}^5C_1 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$.

10. a) O desenvolvimento tem **$n + 1 = 7$ termos** b) Soma dos coeficientes: fazendo $a = b = 1$, obtém-se $(1 + 1)^6 = {}^6C_0 + {}^6C_1 + \dots + {}^6C_6 = 2^6 = 64$.

11. a) **F** — ${}^7C_2 = 21$ e ${}^7A_2 = 42$; a combinação é o arranjo a dividir por $2!$ (${}^7C_2 = 42/2 = 21$) b) **V** — escolher todos os 5 é uma única possibilidade c) **V** d) **F** — tem **6 termos** ($n + 1 = 5 + 1$) e) **V** — ${}^9C_4 = {}^9C_5 = 126$ (simetria: $4 + 5 = 9$).

12. a) ${}^6C_2 \times {}^4C_1 = 15 \times 4 = 60$ **comissões** (multiplicam-se as escolhas de cada grupo) b) Total de comissões: ${}^{10}C_3 = 120$. Sem raparigas: ${}^6C_3 = 20$. Logo, pelo menos uma rapariga: $120 - 20 = 100$ **comissões**.

Nota: justifica sempre a escolha entre arranjo e combinação com a pergunta «a ordem conta?» — é a competência central deste tema e é cotada nos testes.