

Teste de Matemática — Cálculo diferencial

11.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos. Identifica a regra de derivação usada, constrói o quadro de variação quando se pede monotonia ou extremos e indica as unidades nos problemas de aplicação. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Taxas de variação e derivadas

1. (2 valores) Calcula a taxa média de variação de $f(x) = x^2$ no intervalo $[2, 5]$ e interpreta geometricamente o resultado.
2. (2 valores) Escreve e simplifica a razão incremental de $f(x) = 3x^2$ em $x = 1$ e indica para que valor tende quando $h \rightarrow 0$.
3. (2 valores) Determina a função derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ e calcula $f'(2)$.
4. (2 valores) Deriva $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 1)$, aplicando a regra do produto e confirmando o resultado por desenvolvimento.

Grupo II — Reta tangente, monotonia e extremos

5. (2 valores) Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$ no ponto de abscissa $x = 3$.

6. (2 valores) Determina os valores de x em que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2$ é horizontal.

7. (2 valores) Para $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, estuda a monotonia, apresenta o quadro de variação e indica os extremos relativos.

8. (2 valores) Determina os extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x$ no intervalo $[-1, 2]$.

Grupo III — Aplicações

9. (2 valores) Um terreno retangular tem 100 m de perímetro. Determina as dimensões do terreno de área máxima e indica essa área.

10. (2 valores) A posição de um móvel (em metros) ao fim de t segundos é $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, com $t \geq 0$. a) Obtém a função velocidade. b) Indica os instantes em que a velocidade é nula e calcula $v(2)$, interpretando o sinal.

Soluções e critérios de classificação

1. $TMV = [f(5) - f(2)] / (5 - 2) = (25 - 4) / 3 = 7$. É o declive da reta secante ao gráfico de x^2 nos pontos (2, 4) e (5, 25): em média a função cresce 7 unidades por cada unidade de x .
2. Razão incremental em $x = 1$: $[3(1 + h)^2 - 3] / h = (3 + 6h + 3h^2 - 3) / h = (6h + 3h^2) / h = 6 + 3h$. Quando $h \rightarrow 0$ tende para **6**, logo $f'(1) = 6$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 8x$; $f'(2) = 3 \times 4 - 8 \times 2 = 12 - 16 = -4$.
4. Regra do produto: $f'(x) = (2x)(2x - 1) + (x^2 + 3)(2) = 4x^2 - 2x + 2x^2 + 6 = 6x^2 - 2x + 6$. Confirmação: $(x^2 + 3)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$, cuja derivada é $6x^2 - 2x + 6$ ✓.
5. $f(3) = 9 - 6 = 3$ e $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(3) = 4$. Reta tangente: $y = 3 + 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 9$.
6. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Nesses pontos a tangente é horizontal.
7. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$; zeros: $x = 1$ e $x = 3$. Sinal: $f' > 0$ em $]-\infty, 1[$, $f' < 0$ em $]1, 3[$ e $f' > 0$ em $]3, +\infty[$, logo f é crescente $\nearrow$, depois decrescente $\searrow$ e depois crescente $\nearrow$. Quadro: **$x = 1$ é máximo relativo** ($f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$) e **$x = 3$ é mínimo relativo** ($f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$).
8. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$; no intervalo $[-1, 2]$ o único ponto crítico interior é $x = 1$. Valores: $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(1) = 1 - 3 = -2$ e $f(2) = 8 - 6 = 2$. Máximo absoluto **2** (em $x = -1$ e $x = 2$) e mínimo absoluto **-2** (em $x = 1$).
9. Se um lado mede x , o outro mede $50 - x$ (perímetro 100), logo $A(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$, com $0 < x < 50$. $A'(x) = 50 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 25$; como A' passa de $+$ para $-$, é máximo. O terreno é um **quadrado de 25 m $\times$ 25 m**, com **área 625 m²**.
10. a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ b) $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \Leftrightarrow 3(t - 1)(t - 3) = 0 \rightarrow$ velocidade nula em **$t = 1$ s e $t = 3$ s**. $v(2) = 12 - 24 + 9 = -3$ m/s: o sinal negativo significa que nesse instante o móvel se desloca **em sentido contrário** ao considerado positivo.

CrITÉRIOS: 2 valores por questão — 1,2 valores para o processo (cálculo da derivada, quadro de variação ou modelo) e 0,8 valores para o resultado e a interpretação. Nos extremos absolutos não se atribui cotação total sem comparar com os extremos do intervalo.