

Resumo — Cálculo diferencial: derivadas e aplicações

11.º Ano Matemática A 2 páginas Síntese

Esta síntese reúne o cálculo diferencial do 11.º ano: taxa média e instantânea de variação, razão incremental, derivada e reta tangente, função derivada e regras de derivação, monotonia e extremos pelo sinal da derivada, e problemas de otimização.

1. Taxa média de variação e razão incremental

- Taxa média de variação** de f em $[a, b]$: $TMV = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — é o **declive da reta secante** aos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e traduz «quanto varia f , em média, por unidade de x ».
- Razão incremental** em $x = a$: $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ($h \neq 0$) — é a TMV no intervalo $[a, a + h]$.
- Numa **função linear** $f(x) = mx + n$ a TMV é constante e igual a m , em qualquer intervalo.

2. Taxa instantânea e derivada

- A **taxa instantânea** é o valor para que tende a razão incremental quando $h \rightarrow 0$. Designa-se por $f'(a)$ — a derivada de f em a .
- Interpretação geométrica**: $f'(a)$ é o **declive da reta tangente** ao gráfico no ponto $(a, f(a))$.
- No movimento retilíneo, a derivada da posição é a **velocidade** (instantânea).
- Nunca se substitui $h = 0$ na razão incremental: **simplifica-se primeiro** e depois faz-se h tender para 0.

3. Função derivada e regras de derivação

$f(x)$	$f'(x)$	Regra
c (constante)	0	derivada de uma constante
x	1	—
x^n	$n x^{n-1}$	regra da potência (n natural)
$c \cdot f$	$c \cdot f'$	coeficiente constante
$f + g$	$f' + g'$	soma (termo a termo)
$f \times g$	$f'g + fg'$	regra do produto
u / v	$(u'v - uv') / v^2$	regra do quociente ($v \neq 0$)
$1 / x$	$-1 / x^2$	caso particular ($x \neq 0$)

4. Reta tangente

No ponto de abcissa a : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Se $f'(a) = 0$ a tangente é **horizontal**.

5. Monotonia e extremos pelo sinal da derivada

- $f' > 0$ num intervalo $\Rightarrow f$ **crescente**; $f' < 0 \Rightarrow f$ **decrescente**.
- **Extremo relativo**: f' passa de + para - em $x = a \Rightarrow$ **máximo** relativo; de - para + $\Rightarrow$ **mínimo** relativo.
- $f'(a) = 0$ **não garante extremo** — só indica um candidato. Se f' não muda de sinal (por exemplo $f(x) = x^3$ em $x = 0$), não há extremo.
- **Quadro de variação**: uma linha com o sinal de f' (+ / 0 / -) e outra com as setas de f ($\nearrow$ / $\searrow$), registando f nos pontos críticos.

6. Extremos absolutos e otimização

- **Extremos absolutos em $[a, b]$** : calculam-se f nos extremos do intervalo e nos pontos críticos interiores; o maior valor é o máximo absoluto e o menor o mínimo absoluto.
- **Receita de otimização**: (1) escrever a função objetivo com **uma só variável** e indicar o domínio; (2) derivar; (3) resolver $f'(x) = 0$; (4) confirmar pelo sinal de f' que se trata de máximo ou mínimo; (5) responder **com unidades**.
- Verificar sempre se o ponto crítico **pertence ao domínio do problema** (só aí tem significado).

7. Erros frequentes a evitar

- Substituir $h = 0$ antes de simplificar a razão incremental.
- Esquecer a regra do produto: $(f \times g)'$ **não** é $f' \times g'$.
- Concluir que há extremo só porque $f' = 0$, sem estudar a mudança de sinal.
- Ignorar os **extremos do intervalo** ao procurar máximos e mínimos absolutos.
- Dar a resposta de um problema de otimização sem unidades ou sem verificar o domínio.

Controlo rápido: para $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $f'(x) = 2x - 6 \rightarrow$ zero em $x = 3$; $f' < 0$ antes e $f' > 0$ depois, logo **$x = 3$ é mínimo**, com $f(3) = -4$.

Confirmação pela razão incremental em $x = 3$: $[(3 + h)^2 - 6(3 + h) + 5 - (-4)]/h = (9 + 6h + h^2 - 18 - 6h + 5 + 4)/h = h^2/h = h \rightarrow 0$, logo $f'(3) = 0 \checkmark$.