

Ficha 16 — Arranjos e permutações

11.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Distinguir arranjos completos, arranjos simples e permutações, aplicar as respetivas fórmulas e resolver problemas de contagem em que a ordem dos elementos é relevante.

Revisão rápida — quando a ordem importa

- **Arranjo completo:** escolher k elementos de um conjunto de n , **com repetição permitida**, em que a ordem conta $\rightarrow n^k$.
- **Arranjo simples:** escolher k elementos **distintos** de um conjunto de n (sem repetição), em que a ordem conta $\rightarrow {}^nA_k = n! / (n - k)! = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$.
- **Permutação:** ordenar **todos** os n elementos distintos $\rightarrow {}^nP_n = n!$ (é o caso particular de arranjo simples com $k = n$).
- **Casos com elementos repetidos:** n elementos com grupos de iguais de tamanhos $p, q, \dots \rightarrow n! / (p! \times q! \times \dots)$ (anagramas).
- **Palavras-sinal:** «código», «pódio», «classificação», «senha», «cargo», «anagrama» $\rightarrow$ a *ordem interessa*. Se a ordem não interessar, usam-se combinações (ficha seguinte).

Situação	Repetição	Fórmula
Arranjo completo	permitida	n^k
Arranjo simples	não	$n! / (n - k)!$
Permutação	não (usa todos)	$n!$
Permutação com repetidos	grupos iguais	$n! / (p! q! \dots)$

Exercícios

1. Pódio: numa corrida participam 8 atletas. Quantas classificações diferentes são possíveis para os três primeiros lugares (ouro, prata e bronze)?

2. Código de 3 dígitos (0 a 9): a) quantos códigos existem com repetição permitida? b) e sem repetição?

3. Números de 4 algarismos: a) quantos existem no total (o primeiro não pode ser 0)? b) quantos têm os quatro algarismos distintos?

4. Cargos distintos: numa turma de 12 alunos vão eleger-se um presidente e um secretário. Quantas escolhas diferentes são possíveis?

5. Ordenações: a) de quantas formas se podem arrumar 6 livros diferentes numa estante? b) e se 3 desses livros forem iguais entre si?

6. Anagramas: quantas palavras (com ou sem sentido) se formam com as letras de a) LIVRO · b) BANANA?

7. Fórmulas: calcula a) 7A_2 · b) ${}^{10}A_3$ · c) 8A_6 · d) simplifica nA_2 .

8. Com restrição: quantos números de 3 algarismos são pares? (o primeiro não pode ser 0)

9. Senha mista: uma senha tem 2 letras *distintas* (de um alfabeto de 26) seguidas de 2 dígitos *distintos* (0 a 9). Quantas senhas diferentes existem?

10. Baralho: retiram-se 3 cartas, uma a uma, de um baralho de 52 cartas, registando a ordem. Quantas sequências diferentes se podem obter?

11. V/F — corrige as falsas: a) ${}^5A_2 = 20 \cdot$ b) ${}^4A_4 = 4! \cdot$ c) num arranjo completo a repetição não é permitida · d) BANANA tem $6! / (3! \times 2!)$ anagramas · e) ${}^8A_3 = 8 \times 7 \times 6$.

12. Problema: numa turma de 10 alunos pretende-se formar uma comissão com *três cargos distintos* (presidente, tesoureiro e secretário). Quantas comissões diferentes se podem formar? Explica porque é que a ordem dos cargos é relevante.

Dica: começa por responder a duas perguntas — «*pode haver repetição?*» e «*a ordem interessa?*». Só depois escolhes a fórmula. E em problemas com restrições, trata primeiro a posição restrita (por exemplo, o primeiro algarismo de um número).

Soluções — Arranjos e permutações

1. ${}^8A_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ **classificações** (sem repetição, porque o mesmo atleta não pode ocupar dois lugares).
2. a) $10^3 = 1\,000$ **códigos** (arranjo completo) b) ${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ **códigos** (arranjo simples).
3. a) $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ **números** b) $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$ **números** (o 1.º algarismo tem 9 hipóteses e cada seguinte perde uma).
4. ${}^{12}A_2 = 12 \times 11 = 132$ **escolhas** (presidente e secretário são *cargos distintos*: a ordem conta).
5. a) $6! = 720$ **arrumações** b) $6! / 3! = 720 / 6 = 120$ **arrumações** (cada arrumação é contada 3! vezes por causa dos livros iguais).
6. a) $5! = 120$ **anagramas** b) $6! / (3! \times 2!) = 720 / (6 \times 2) = 720 / 12 = 60$ **anagramas** (3 letras A e 2 letras N iguais).
7. a) ${}^7A_2 = 7 \times 6 = 42$ b) ${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ c) ${}^6A_6 = 6! = 720$ (arranjo que usa todos os elementos = permutação) d) ${}^nA_2 = n \times (n - 1) = n^2 - n$.
8. $9 \times 10 \times 5 = 450$ **números**: 9 hipóteses para o 1.º algarismo, 10 para o 2.º e 5 para o último (só 0, 2, 4, 6 ou 8, para o número ser par).
9. $26 \times 25 \times 10 \times 9 = 58\,500$ **senhas** (as letras não repetem, 26 e 25; os dígitos também não, 10 e 9).
10. ${}^{52}A_3 = 52 \times 51 \times 50 = 132\,600$ **sequências** (cada carta retirada não volta ao baralho).
11. a) $V = 5 \times 4 = 20$ b) $V = {}^4A_4 = 4! = 24$ c) F — no arranjo *completo* a repetição é permitida (fórmula n^k) d) V — é o caso dos anagramas com elementos repetidos e) $V = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
12. ${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ **comissões**. A ordem é relevante porque os cargos são *diferentes*: a mesma terna de alunos dá comissões distintas conforme quem é presidente, tesoureiro ou secretário ($3! = 6$ arrumações por terna).

Nota: indica sempre a *fórmula* usada (n^k , nA_k , $n!$ ou $n!/(p! q!)$) antes de calcular — é isso que mostra que identificaste corretamente o tipo de contagem.