

Ficha 21 — Vetores, equação da reta e espaço

10.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Trabalhar vetores no espaço (componentes, norma, operações, colinearidade); escrever e usar a equação vetorial e a reduzida da reta; reconhecer planos (equação geral, normal) e esferas; aplicações (trajetórias, cobertura).

Revisão rápida — vetores e retas no espaço

Componentes: $\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ · **Norma:** $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ · **Unitário:** $\vec{v}/|\vec{v}|$.

Operações: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ · $\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ · **colineares** $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v}$ (um é escalar do outro) · $\vec{u} = \vec{0}$ também é colinear a tudo (não serve para diretor).

Equação vetorial da reta: $\vec{r} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ — A ponto, u vetor diretor · cada λ dá um ponto · **distância** entre λ_1 e $\lambda_2 = |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot |\vec{u}|$.

Equação reduzida: $(x - x_0)/u = (y - y_0)/v = (z - z_0)/w$ — mesma reta: (x_0, y_0, z_0) ponto, (u, v, w) diretor.

Plano: geral $ax + by + cz + d = 0$, normal $\vec{n} = (a, b, c)$ · por ponto A e normal: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ · distância do ponto P ao plano: $|ax_P + by_P + cz_P + d| / |\vec{n}|$.

Esfera: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ [centro (a, b, c), raio r] — pertence se dá r^2 ; interior se dá $< r^2$.

Exercícios

1. Componentes: A(1, 2, 3), B(4, 0, 5): $\vec{AB} = \underline{\hspace{1cm}}$ · e outro vetor igual a $\vec{AB}$? $\underline{\hspace{1cm}}$ (dá um exemplo) — porque é que (3, -2, 2) e $\vec{AB}$ «são o mesmo»? (1 frase)

2. Norma: $\vec{v} = (3, -2, 2)$: $|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17} \approx \underline{\hspace{1cm}}$ · vetor unitário na direção de $\vec{v}$: $\underline{\hspace{1cm}}$.

3. Operações: $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{w} = (0, 3, 1)$: a) $\vec{u} + \vec{w} = \underline{\hspace{1cm}}$ b) $2\vec{u} - \vec{w} = \underline{\hspace{1cm}}$ c) $|\vec{u} + \vec{w}| = \underline{\hspace{1cm}}$

4. Colinearidade: a) (2, 4, -2) e (-1, -2, 1): colineares? sim $\underline{\hspace{1cm}}$ ($\lambda = \underline{\hspace{1cm}}$) b) (1, 2, 3) e (1, 2, 4)? $\underline{\hspace{1cm}}$ — porque? c) o que a colinearidade garante sobre a reta que «puxa» esses vetores? $\underline{\hspace{1cm}}$

10. Esfera: centro $(1, -2, 3)$, $r = 4$: a) equação ___ b) $(1, -2, 7)$ pertence? distância ao centro ___ $\rightarrow$ ___ c) $(1, -2, 3)$: dá ___ $\rightarrow$ é o ___ d) $(0, 0, 0)$: dá $1 + 4 + 9 = 14 < 16 \rightarrow$ dentro ou fora? ___.

11. Algoritmo (Python):

```
import math
def norma(v): return math.sqrt(sum(x*x for x in v))
u=(3,-2,2); print(norma(u))
```

a) impresso $\approx$ ___ (arredonda a 3 decimais) b) colinearidade: escreve um `if` que compara v e w por escala ($\lambda = v_i/w_i$) e diz se são colineares c) na reta $r = OA + \lambda u$, que distância separa $\lambda = 0$ de $\lambda = 2$? $= 2 \cdot |u| \approx$ ___ (usa $|u| = \sqrt{17}$).

12. Aplicação — drone: $P(t) = (1, 2, 3) + t \cdot (1, 0, -1)$ (t em s): a) onde está em $t = 4$? ___ b) espaço percorrido em 4 s: $4 \cdot \sqrt{2} \approx$ ___ c) o plano $z = 0$ (chão) é cortado em que t ? $\rightarrow$ ponto ___ d) 2 limites do modelo (v constante) + 1 razão para usar a esfera numa zona de cobertura.

Soluções — Ficha 21: Vetores, reta e espaço

1. $AB = (4-1; 0-2; 5-3) = (3, -2, 2)$ · exemplo igual: $(3, -2, 2)$ a partir de qualquer ponto — ex.: de $C(0, 0, 0)$ até $(3, -2, 2)$ · «são o mesmo» porque só importam **deslocamento e direção** (componentes), não a posição de partida (translações dão vetores iguais).

2. $|v| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17} \approx 4,123$ · unitário: $(3, -2, 2)/\sqrt{17} = (3/\sqrt{17}; -2/\sqrt{17}; 2/\sqrt{17}) \approx (0,728; -0,485; 0,485)$ — norma 1 por construção.

3. a) $(1+0; 2+3; -1+1) = (1, 5, 0)$ b) $2u - w = (2, 4, -2) - (0, 3, 1) = (2, 1, -3)$ c) $|(1,5,0)| = \sqrt{1+25+0} = \sqrt{26} \approx 5,099$.

4. a) sim, $\lambda = -2$ — $(2, 4, -2) = -2 \cdot (-1, -2, 1)$ ✓ b) **não** — não existe λ com $(1,2,3) = \lambda(1,2,4)$ ($1 = \lambda \cdot 1$ dá $\lambda = 1$, mas $3 \neq 4 \cdot 1$) c) colineares = *mesma direção* (ou oposta) → os vetores «puxam» a **mesma reta** — por isso qualquer um serve de vetor diretor.

5. a) $r = (1, 0, -2) + \lambda(2, 3, -1)$ b) $\lambda = 2$: $(1+4; 0+6; -2-2) = (5, 6, -4)$ c) $\lambda = -1$: $(1-2; 0-3; -2+1) = (-1, -3, -1)$.

6. a) ponto $(1, 0, -2)$ (repara no $z + 2 = z - (-2)$) b) diretor $(2, 3, -1)$ c) $r = (1, 0, -2) + \lambda(2, 3, -1) \rightarrow$ **sim, a mesma reta** (as duas formas dão o mesmo ponto+direção — a reduzida é só a vetorial «dividida componente a componente»).

7. a) $(5-1)/2 = 2$, $(6-0)/3 = 2$, $(-4+2)/(-1) = 2 \rightarrow \lambda = 2$ em todos $\rightarrow$ **pertence ✓** b) $-1/2 \neq 0/3 \rightarrow$ **não pertence** (os quocientes não coincidem: a origem não está na reta).

8. a) $n = (2, -1, 3)$ (coeficientes de x, y, z — a normal é perpendicular ao plano) b) $4 - 1 + 3 = 6 \rightarrow$ **pertence ✓** c) $2 - 1 + 3 = 4 \neq 6 \rightarrow$ **não pertence** d) $|0 + 0 + 0 - 6|/\sqrt{4+1+9} = 6/\sqrt{14} \approx 1,604$ unidades.

9. a) $0(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) = 0 \rightarrow z = 3$ — plano horizontal (paralelo ao plano xy) que corta o eixo OZ em 3 b) $1(x-1) + 0 + 0 = 0 \rightarrow x = 1$ — plano vertical paralelo ao plano yz .

10. a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ b) distância = $\sqrt{0+0+16} = 4 \rightarrow$ **pertence ✓** (está na casca) c) dá $0 \rightarrow$ é o **centro** (interior — $0 < 16$) d) $14 < 16 \rightarrow$ **dentro** (interior da esfera).

11. a) $\sqrt{17} \approx 4,123$ (o Python imprime 4.123105625617661) b) ideia: $\lambda = v_i/w_i$ e testa $v == \lambda w$ componente a componente:

```
def colineares(v, w):
    l = v[0]/w[0]
    return all(abs(v[i]-l*w[i]) < 1e-9 for i in range(3))
```

c) $2 \cdot \sqrt{17} \approx 8,246$ unidades — a λ cresce 1, avança $|u|$ ao longo da direção.

12. a) $(1+4; 2+0; 3-4) = (5, 2, -1)$ b) $4 \cdot \sqrt{2} \approx 5,657$ ($\approx 5,66$) c) $z = 3 - t = 0 \rightarrow t = 3$ s, ponto $(4, 2, 0)$ d) limites: (1) velocidade *constante* — na realidade há arranque, vento e curvas (aceleração $\neq 0$) (2) o modelo não prevê obstáculos nem limites do espaço aéreo (só a linha) · esfera para cobertura: **todos os pontos a r da antena** têm o mesmo alcance/sinal — é o conjunto dos pontos «servidos» (3D) — exige só centro e raio, fácil de calcular.