

Ficha 19 — Pontos notáveis e retas notáveis do triângulo

10.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Construir e identificar o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro; demonstrar o corte 2/1 da mediana; reconhecer a reta de Euler e a circunferência dos 9 pontos (relação com o segmento circuncentro–ortocentro).

Revisão rápida — os 4 pontos notáveis

Ponto	Interseção de...	Propriedade-chave
Incentro (I)	3 bissetrizes dos ângulos internos	equidistante dos lados (raio do inscrito)
Circuncentro (O)	3 mediatrizes dos lados	equidistante dos vértices (raio do circunscrito)
Ortocentro (H)	3 alturas	cada vértice→pé da altura é $\perp$ ao lado oposto
Baricentro (G)	3 medianas	corta cada mediana em $\frac{2}{3}$ ($AG = 2 \cdot GM$) — «centro de massa»

- **Reta de Euler:** H, G, O são colineares com $OG : GH = 1 : 2$ (G entre O e H). Em triângulos equiláteros todos coincidem.
- **Circunferência dos 9 pontos:** passa pelos **3 pontos médios dos lados** + **3 pés das alturas** + **3 pontos médios de [vértice, H]**. Centro = **ponto médio de OH** · raio = $R/2$ (metade do circunscrito).
- **6 triângulos equivalentes:** as 3 medianas dividem o triângulo em 6 triângulos de **área igual**.
- **Casos especiais:** equilátero → 4 pontos no mesmo ponto · retângulo → H = vértice do ângulo reto, O = ponto médio da hipotenusa · obtusângulo → O e H *fora* do triângulo.

Exercícios

1. Define os 4 pontos notáveis — cada um pela reta que o constrói (1 linha cada) — e a propriedade que o distingue.

2. Identifica pelo enunciado: a) interseção das mediatrizes → __ b) interseção das alturas → __ c) interseção das bissetrizes → __ d) ponto onde as medianas se cruzam → __

3. Incentro: porque é que I está igualmente distante dos 3 lados? (usa: ponto numa bissetor tem distâncias iguais aos lados do ângulo — 2 frases) e que circunferência gera esse raio? __

4. Circuncentro (demonstração): P pertence à mediatriz de AB $\Rightarrow$ PA = __ · P na mediatriz de AC $\Rightarrow$ PA = __ $\rightarrow$ logo PA = PB = PC: o que isso garante sobre a circunferência __?

5. Ortocentro no retângulo: no triângulo retângulo de catetos 3 e 4 (hipotenusa 5), onde cai H? — justifica com as alturas dos catetos (2 frases). E onde cai O? — porque? —

6. Baricentro 2/1 (demonstração): método das massas: põe massa 1 em cada vértice A, B, C. a) a mediana de A encontra BC em — (massa —) b) G fica onde as massas se equilibram $\rightarrow AG : GM = \text{massa M} : \text{massa A} = _ : _ c) \text{ conclui } AG = _ \cdot GM.$

7. 6 áreas iguais: as 3 medianas criam 6 triângulos — porque é que têm todos a mesma área? (usa: a mediana divide a área ao meio + o corte 2:1 do baricentro — 3 frases)

8. Reta de Euler: a) que 3 pontos são colineares? — b) razão $OG : GH = _ c) \text{ no retângulo com vértices } A = (0,0), B = (3,0), C = (0,4): H = (0,0) \text{ e } O = (1,5; 2) \text{ — calcula } G = (A+B+C)/3 \rightarrow G = _ \text{ e mostra que } G \text{ fica entre } O \text{ e } H \text{ com } OG : GH = 1 : 2.$

9. 9 pontos: a) lista os 3 grupos de 3 pontos da circunferência dos 9 pontos ___ b) centro = ponto médio de qual segmento? ___ c) raio = ___ $\times$ R — e R é o quê?

10. Casos especiais: completa: a) equilátero $\rightarrow$ incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro: ___ b) retângulo $\rightarrow$ O = ___, H = ___ c) obtusângulo $\rightarrow$ O e H ficam ___ do triângulo — porquê?

11. Leitura de figura: no desenho (triângulo genérico com retas pontilhadas), o professor marca I como o ponto de interseção de duas retas que tocam os lados em ângulos iguais. a) que retas são? ___ b) desenha/aponta a distância igual que isso garante c) que círculo se desenha a partir de I com esse raio? ___

12. Aplicações: escolhe um ponto e dá 2 aplicações reais: a) baricentro (pendurar/montar objetos, estabilidade) b) circuncentro (antenas/GPS/salas «a mesma distância») — 1 contra/exceção para cada.

Soluções — Ficha 19: Pontos notáveis

1. *Incentro*: interseção das bissetrizes — equidistante dos lados · *Circuncentro*: interseção das mediatrizes — equidistante dos vértices · *Ortcentro*: interseção das alturas — ponto de encontro das perpendiculares pelos vértices · *Baricentro*: interseção das medianas — corta-as em $2/3$, centro de massa.

2. a) **circuncentro (O)** b) **ortocentro (H)** c) **incentro (I)** d) **baricentro (G)**.

3. Todo o ponto de uma bissetor é igualmente distante dos dois lados do ângulo (os dois triângulos com vértices em I são congruentes pela bissetor) — I pertence às 3 bissetrizes logo está à mesma distância dos 3 lados. O raio I→lado gera a **circunferência inscrita** (tangente aos 3 lados).

4. $PA = PB = PC \rightarrow PA = PB = PC$: os três vértices ficam à **mesma distância de P** → P é o centro da **circunferência circunscrita** (raio = PA) que passa por A, B e C.

5. H = **vértice do ângulo reto** (o pé da altura do cateto CB é o próprio vértice: as alturas pelos vértices dos catetos *são* os catetos, que se cruzam no ângulo reto). O = **ponto médio da hipotenusa** ($5/2 = 2,5$ de cada vértice — ângulo inscrito em semicírculo é reto: só esse ponto equidista dos 3 vértices). No ex.: O = (1,5; 2) com hipotenusa de (3,0) a (0,4).

6. a) mediana de A encontra BC em M = **ponto médio** (massa $1 + 1 = 2$) b) equilíbrio em G: $AG : GM = 2 : 1$ (massa em M : massa em A) c) **$AG = 2 \cdot GM$** — ou seja, G está a $2/3$ da mediana contada do vértice.

7. Seja M ponto médio de BC: $[ABM] = [ACM] = T/2$ (bases BM = MC, mesma altura de A). G corta AM em $AG : GM = 2 : 1 \rightarrow$ em $[ABM]$: $[BGM] = (1/3) \cdot (T/2) = T/6$; em $[ACM]$: $[CGM] = (1/3) \cdot (T/2) = T/6$. Repetindo o argumento para os outros dois lados (outras duas medianas), os **6 triângulos** valem todos $T/6$ — área igual.

8. a) **H, G, O** (ortocentro, baricentro, circuncentro) b) **$1 : 2$** ($OG : GH$) c) $G = (0+3+0)/3, (0+0+4)/3 = (1; 4/3 \approx 1,33)$ · O = (1,5; 2), H = (0, 0): vetor $O \rightarrow G = (-0,5; -0,67)$, $G \rightarrow H = (-1; -1,33) = 2 \times \rightarrow$ razão $OG : GH = 1 : 2 \checkmark$ e G fica entre O e H $\checkmark$.

9. a) (1) pontos médios dos **3 lados** (2) pés das **3 alturas** (3) pontos médios dos segmentos [**vértice ; H**] b) ponto médio do segmento **circuncentro–ortocentro (OH)** c) raio = $R/2$ — metade do raio da circunferência circunscrita (R = distância O a qualquer vértice).

10. a) os 4 pontos **coincidem** (simetria total: só nesse caso) b) O = **ponto médio da hipotenusa** · H = **vértice do ângulo reto** c) **fora** — num obtusângulo as alturas e as mediatrizes «fogem» para o exterior (o vértice obtuso empurra H do lado oposto e O para fora do maior lado).

11. a) **bissetrizes** (dividem os ângulos em duas partes iguais) b) as perpendiculares de I até os 3 lados têm **mesmo comprimento** c) o **círculo inscrito** (tangente aos 3 lados).

12. a) aplicações: (1) pendurar um quadro/troféu pela altura de G — o objeto fica *estável* (suspensão em G = equilíbrio de torques) (2) desenho de barras/carros: baixar o centro de massa (perto do baricentro das rodas) aumenta a estabilidade · contra: objetos *irregulares/vazados* podem ter G fora da matéria — não se pendura «no vazio». b) aplicações:

(1) 3 antenas/relvados «a mesma distância» de um ponto (O) → cobertura uniforme (2) localizar posição por distância igual a 3 referências (princípio do GPS: **trilateração**) · contra: exige 3 referências exatas e solo plano — em terreno real ou com erro de medição, O desvia-se (daí o GPS usar 4+ satélites e correções).