

# Ficha 8 — Medidas de localização e dispersão

10.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

**Objetivo:** Calcular média, mediana, moda e percentis; amplitude, amplitude interquartil, variância e desvio-padrão; aplicar a regra dos outliers e interpretar a dispersão (incluindo a aproximação de 95% dos dados).

## Revisão rápida — onde fica o centro, quanto espalha

**Localização:** média =  $\sum x_i/n$  (sensível a outliers) · mediana = valor central (robusta) · moda = valor mais frequente ·  $P_k$ : posição  $(k/100) \cdot n \rightarrow Q1 = P25, Q2 = P50 = \text{mediana}, Q3 = P75$ .  
**Disp:** AT = max – min · AIQ =  $Q3 - Q1$  · variância  $\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2/n$  (unidade ao quadrado!) ·  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  (mesma unidade dos dados).  
**Outliers:** fora de  $[Q1 - 1,5 \cdot AIQ ; Q3 + 1,5 \cdot AIQ]$  · **Regra ~95%:** se aproximadamente simétrico, ~95% dos dados dentro de  $\bar{x} \pm 2\sigma$ .  
**Transformações:**  $x \rightarrow x + b$ : média +b,  $\sigma$  inalterada ·  $x \rightarrow a \cdot x$ : média  $\cdot a$ ,  $\sigma \cdot a, \sigma^2 \cdot a^2$  — assimetria à direita: média > mediana; à esquerda: média < mediana.

## Exercícios

1. Define média, mediana e moda — e indica qual usas numa distribuição *assimétrica à direita* com um outlier, e porque.
2. Mediana: com 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9: a) ordenados ✓ mediana \_\_ b) acrescenta 11 → nova mediana \_\_ c) porque é que a mediana quase não mudou?
3. Moda: a) 2, 3, 3, 4, 4, 5 → \_\_ b) 7, 9, 12 → \_\_ c) turma: 4 alunos com 15 anos, 6 com 16, 2 com 17 → moda \_\_ — o que significa na prática?
4. Percentis (20 notas: 1, 2, ..., 20): a) posição de P90 \_\_ → P90 = \_\_ b) Q1 = \_\_ c) Q3 = \_\_ d) relação Q2 e mediana: \_\_

5. Média vs. mediana: tempos de espera (min): 10, 11, 12, 12, 13, 60. a) média \_\_\_ b) mediana \_\_\_ c) qual descreve melhor o «espera típica» e porquê? \_\_\_

6. Outliers: dados 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 40: a) Q1 \_\_\_ Q3 \_\_\_ AIQ \_\_\_ b) limites: [\_\_\_ ; \_\_\_] c) quais valores são outliers? \_\_\_ — porque o 40 distorce a média mas não a mediana?

7. Variância e  $\sigma$ : para 4, 8, 6, 5, 7: a) média \_\_\_ b) tabela de  $(x_i - \bar{x})^2$  c)  $\sigma^2$  \_\_\_ d)  $\sigma$  \_\_\_ (2 casas) e) por que  $\sigma$  e não  $\sigma^2$  para interpretar?

8. Transformações: com o ex. 7 ( $\bar{x} = 6$ ,  $\sigma = \sqrt{2}$ ): a) +10 a cada valor  $\rightarrow$  nova média \_\_\_  $\sigma$  \_\_\_ b)  $\times 3 \rightarrow$  média \_\_\_  $\sigma$  \_\_\_ c)  $\sigma^2$  passa de 2 para \_\_\_ — confirma « $a \cdot x \Rightarrow \sigma^2 \cdot a^2$ »?

9. Dimensão: pesos em kg dão  $\sigma^2$  em \_\_\_ e  $\sigma$  em \_\_\_ — se  $\sigma = 3,2$  kg, porque é que reportar «variância 10,24 kg<sup>2</sup>» confunde? (2 frases)

10. Algoritmo (Python):

```
v=[4,8,6,5,7]
m=sum(v)/len(v)
var=sum((x-m)**2 for x in v)/len(v)
print(round(var,2), round(var**0.5,2))
```

a) impresso \_\_ b) se dividisses por  $\text{len}(v)-1$ , quanto daria? \_\_ c) soma +20 a cada valor antes de correr — o que imprime agora? \_\_

11. Interpretação com 95%: viagens de comboio:  $\bar{x} = 30$  min,  $\sigma = 3$  min ( $\approx$  simétrico). a) intervalo ~95%: [\_\_ ; \_\_] b) se saíres às 8h00 e precisares de lá estar até 8h40, que probabilidade «prática» de atraso relevante? \_\_ c) o que  $\sigma = 12$  min (outro comboio) mudaria? \_\_

12. Comparação: notas: turma A: 12, 14, 13, 15, 16 · turma B: 8, 20, 11, 17, 14. a) médias A \_\_ B \_\_ b)  $\sigma$  de A \_\_ de B \_\_ (2 casas) c) qual é «mais consistente»? — 2 razões com números + 1 mas contra (o que a média não capta).

## Soluções — Ficha 8: Medidas de localização e dispersão

1. *Média*: razão da soma dos valores pelo  $n^\circ$  de observações (centro de massa) · *Mediana*: valor que ocupa a posição central quando ordenados (divide em 50/50) · *Moda*: valor(s) mais frequente(s). Em assimetria à direita com outlier usa-se a **mediana** — a média é arrastada pelo extremo (ex.: 60 min puxa a média sem mudar o que «espera» metade das pessoas).

2. a) ordenados: 3, 5, 5, **6**, 7, 8, 9 → mediana = **6** b) 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 11 →  $(6+7)/2 = \mathbf{6,5}$  c) a mediana depende só da *posição central* — acrescentar um valor à cauda mexe no centro muito pouco; a média, em contraste, mover-se-ia mais.

3. a) **bimodal: 3 e 4** (ambos com freq. 2) b) **sem moda** (todas as frequências = 1) c) moda = **16 anos** — a idade mais comum da turma (6 de 12 alunos), apesar de a média ser  $(4 \cdot 15 + 6 \cdot 16 + 2 \cdot 17)/12 = 15,83$ .

4. a) posição =  $0,90 \times 20 = 18 \rightarrow P_{90} = \mathbf{18}^\circ$  valor = **18** b)  $Q_1$ : posição  $0,25 \times 20 = 5 \rightarrow \mathbf{5}$  c)  $Q_3$ : posição 15 → **15** d)  $Q_2 = P_{50}$ : posição 10,5 →  $(10+11)/2 = \mathbf{10,5} = \text{mediana}$  ✓ ( $Q_2$  é a mediana,  $P_{50}$ ).

5. a)  $(10+11+12+12+13+60)/6 = 118/6 = \mathbf{19,67 \text{ min}}$  b)  $(12+12)/2 = \mathbf{12 \text{ min}}$  c) a **mediana** — metade espera  $\leq 12$  min; a média de 19,67 é quase toda do atraso de 60 min (um só caso), que não representa a espera típica.

6. a)  $Q_1 = (7+8)/2 = \mathbf{7,5}$  ·  $Q_3 = (11+12)/2 = \mathbf{11,5}$  ·  $AIQ = \mathbf{4}$  b)  $[7,5 - 6 ; 11,5 + 6] = [\mathbf{1,5} ; \mathbf{17,5}]$  c) **40** ( $40 > 17,5$ ) é outlier; 5 não ( $5 \geq 1,5$ ). A média  $(102/8 = \mathbf{12,75})$  fica bem acima da mediana  $(9+10)/2 = \mathbf{9,5}$  — a mediana só usa posições, por isso é robusta ao 40.

7. a)  $(4+8+6+5+7)/5 = 30/5 = \mathbf{6}$  b)  $(-2)^2=4$ ,  $(2)^2=4$ ,  $0^2=0$ ,  $(-1)^2=1$ ,  $1^2=1 \rightarrow$  soma 10 c)  $\sigma^2 = 10/5 = \mathbf{2}$  d)  $\sigma = \sqrt{2} = \mathbf{1,41}$  e)  $\sigma$  tem a **mesma unidade** dos dados (interpreta-se diretamente: «típicamente  $\sim 1,4$  unidade da média»);  $\sigma^2$  fica em unidade<sup>2</sup>, só útil em cálculos.

8. a)  $6+10 = \mathbf{16}$  ·  $\sigma = \mathbf{1,41}$  (inalterada — todos se movem juntos, os desvios não mudam) b) média = **18** ·  $\sigma = 3 \times 1,41 = \mathbf{4,24}$  c)  $a^2 = 9 \rightarrow \sigma^2 = \mathbf{18}$  ✓ ( $= 2 \times 9$  — confirma).

9.  $\sigma^2$  em **kg<sup>2</sup>** ·  $\sigma$  em **kg**. «Variância 10,24 kg<sup>2</sup>» não se compara com o peso de uma pessoa (unidade estranha ao dado);  $\sigma = 3,2$  kg lê-se de imediato: os pesos tipicamente afastam-se  $\sim 3,2$  kg da média — por isso se reporta  $\sigma$ , guardando  $\sigma^2$  para álgebra.

10. a)  $m = 6 \rightarrow \text{var} = 10/5 = 2,00 \rightarrow \mathbf{2,0 \text{ } 1,41}$  b)  $10/4 = \mathbf{2,5}$  (variância da amostra  $s^2$  — subestima com  $n$  pequeno) c) desvios idênticos → imprime **2,0 1,41 outra vez** (soma constante não altera dispersão).

11. a)  $30 \pm 2 \cdot 3 = [\mathbf{24} ; \mathbf{36}]$  min b)  $\sim 95\%$  chega entre 8h24 e 8h36 — só  $\sim 5\%$  fica fora; para estar até 8h40, o atraso relevante exigiria  $>40$  min » 36 → **probabilidade prática muito baixa ( $\approx 2,5\%$  de exceder 36; ainda menos de exceder 40)** c)  $\sigma = 12 \rightarrow \sim 95\%$  em  $[6 ; 54]$  — o intervalo alarga 4x: muito menos fiável, chegar até 8h40 deixa de ser seguro.

12. a) A:  $70/5 = \mathbf{14}$  · B:  $70/5 = \mathbf{14}$  (iguais!) b) A: desvios  $-2,0, -1,1, 2 \rightarrow$  soma quad = 10 →  $\sigma^2 = 2 \rightarrow \sigma = \mathbf{1,41}$  · B: desvios  $-6,6, -3,3, 0 \rightarrow$  soma quad = 90 →  $\sigma^2 = 18 \rightarrow \sigma = \mathbf{4,24}$  c) **A é mais consistente**: 1) mesmas médias (14) → o nível é igual 2)  $\sigma = 1,41$  vs  $4,24 \rightarrow$  os resultados de A concentram-se perto da média (3x menos dispersão) · mas/contr: a média igual esconde que B tem extremos úteis (um 20) e fracos (um 8) — *consistente  $\neq$  melhor em tudo*: depende do que se valoriza (regularidade vs. pico).