

Ficha 4 — Matemática na poupança e no crédito: juro simples e juro composto

10.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Aplicar as fórmulas de juro simples e composto (com diferentes períodos de capitalização), comparar rentabilidades, calcular o capital inicial ou o tempo de capitalização e interpretar empréstimos e depósitos.

Revisão rápida — as três fórmulas

Juro simples: $j = Ci \times r \times n \rightarrow Cf = Ci \times (1 + r \cdot n)$ (juros só sobre o capital original)

Juro composto (anual): $Cf = Ci \times (1 + r)^n$ (juros sobre juros — «efeito bola de neve»)

Capitalização mensal: $Cf = Ci \times (1 + r/12)^n$ (n em meses; r é a taxa anual)

Inversas: $Ci = Cf / (1+r)^n \cdot n = \ln(Cf/Ci) / \ln(1+r)$ · regra 72: anos $\approx 72 / (r \text{ em } \%)$ para duplicar

Notação: Ci = capital inicial · Cf = capital final · r = taxa anual (decimal: 4% = 0,04) · n = anos (ou meses, na fórmula mensal). Arredonda a cêntimos na resposta final.

Exercícios

1. Distingue juro simples e juro composto em 2 frases — e indica em que tipo de conta cada um é típico (depósito vs. crédito, ex.).

2. Simples: depósito de 5 000 €, r = 4% ao ano, n = 3 anos. a) j __ b) Cf __ c) gráfico mental: porque é que a reta é «reta»?

3. Simples — inverter: de quanto precisa para ter 6 000 € ao fim de n anos, com Ci = 5 000 € e r = 5%? a) montante de juros pretendido __ b) n __

4. Composto vs. simples (mesmo caso): Ci = 5 000 €, r = 4%, n = 3. a) Cf composto __ b) diferença face ao simples (ex. 2) __ c) e se n = 1? — explica.

5. Capitalização mensal: $C_i = 300$ €, $r = 3\%$ ao ano, $n = 10$ meses. a) taxa mensal $= r/12 = ______$ b) C_f $______ (2 \text{ casas})$ c) porque é que a fórmula usa n em meses?

6. Periodicidade: com $C_i = 1\,000$ € e $r = 3\%$ durante 1 ano: a) C_f com capitalização *anual* $______$ b) C_f com capitalização *mensal* $______$ c) qual dá mais e porquê (1 frase)?

7. Rentabilidade: depósito A: 8 000 € a 3,5% composto, 4 anos · depósito B: 6 000 € a 4,5% composto, 4 anos. a) C_f de A $______$ e de B $______$ b) rentabilidade % de cada (1 casa) A $______$ B $______$ c) qual é «melhor»? — depende de quê?

8. Capital inicial: queres ter 6 600 € em 4 anos a 3% composto anual. Calcula o C_i a depositar hoje $______ (2 \text{ casas})$.

9. Tempo de duplicação: a quanto tempo leva um capital a dobrar a 5% composto? a) regra 72: $______$ anos b) cálculo exato: $\ln(2)/\ln(1,05) = ______$ anos (1 casa) c) a regra subestima ou superestima? $______$

10. Empréstimo: 10 000 € a 3 anos, 5% composto. a) total a pagar (Cf) __ b) prestação anual constante (Cf/3) __ c) por que o banco calcula *juros* ao longo do tempo e não só ao final?

11. Algoritmo (Python):

```
ci=300
r=0.03
n=10
cf=ci*(1+r/12)**n
print(round(cf,2))
```

a) valor impresso: __ b) altera n para 22 — novo valor: __ c) o que confirma a diferença entre as periodicidades (relativa ao ex. 6)?

12. Decisão de poupança: tens 2 000 € livres para 2 anos. Opções: (A) «debaixo do colchão» (0%) (B) depósito a 4% composto (C) reforçar o fundo de emergência com custo de oportunidade. a) calcula Cf de B __ b) custo da opção A face a B __ c) escolhe e justifica em 3 frases (2 números + 1 contra).

Soluções — Ficha 4: Juro simples e juro composto

1. *Simples*: os juros incidem sempre só sobre o Ci — a curva é uma reta (típico de créditos/obrigações de curto prazo). *Composto*: cada período os juros se juntam ao capital — cresce exponencialmente (contas-poupança e depósitos a prazo; também hipotecas a longo prazo).

2. a) $j = 5\,000 \times 0,04 \times 3 = \mathbf{600\,€}$ b) $Cf = 5\,000 \times (1 + 0,04 \cdot 3) = \mathbf{5\,600\,€}$ c) porque os juros de cada ano são sempre 200 € — constantes, logo reta.

3. a) $j = 6\,000 - 5\,000 = \mathbf{1\,000\,€}$ b) $n = 1\,000 / (5\,000 \times 0,05) = 1\,000/250 = \mathbf{4\,anos}$.

4. a) $Cf = 5\,000 \times 1,04^3 = 5\,000 \times 1,124864 = \mathbf{5\,624,32\,€}$ b) $5\,624,32 - 5\,000 = \mathbf{24,32\,€}$ (composto ganha aos juros sobre juros) c) com $n = 1$: $1,04^1 = 1 + 0,04$ — **dão o mesmo** (sem tempo para os juros gerarem juros).

5. a) $0,03/12 = \mathbf{0,0025}$ (0,25%/mês) b) $Cf = 300 \times 1,0025^{10} = 300 \times 1,025282 = \mathbf{307,58\,€}$ c) a taxa r é *anual* — para capitalizar por mês divide-se por 12 e conta-se n em meses (senão o tempo não casa com a taxa).

6. a) $1\,000 \times 1,03 = \mathbf{1\,030,00\,€}$ b) $1\,000 \times (1,0025)^{12} = 1\,000 \times 1,030416 = \mathbf{1\,030,42\,€}$ c) a **mensal dá mais** (+0,42 €) — os juros de cada mês passam a render juros nos meses seguintes (mais frequência = mais juros sobre juros).

7. a) A: $8\,000 \times 1,035^4 = 8\,000 \times 1,14864 = \mathbf{9\,189,12\,€}$ · B: $6\,000 \times 1,045^4 = 6\,000 \times 1,192519 = \mathbf{7\,155,11\,€}$ b) A: $(9\,189,12 - 8\,000)/8\,000 = \mathbf{14,9\%}$ · B: $(7\,155,11 - 6\,000)/6\,000 = \mathbf{19,3\%}$ c) B é *melhor em %* (19,3% > 14,9%); A dá *mais euros* (+1 189,12 vs +1 155,11) por ter mais capital inicial — «melhor» depende do objetivo (taxa vs. montante).

8. $Ci = 6\,600 / 1,03^4 = 6\,600 / 1,12550881 = \mathbf{5\,864,01\,€}$ ($\approx 5\,864\,€$).

9. a) $72/5 = \mathbf{14,4\,anos}$ b) $\ln(2)/\ln(1,05) = 0,6931/0,04879 = \mathbf{14,2\,anos}$ c) a regra 72 **superestima** neste caso (14,4 anos > 14,2 anos — aproximação útil, mas o valor exato é ligeiramente menor).

10. a) $Cf = 10\,000 \times 1,05^3 = 10\,000 \times 1,157625 = \mathbf{11\,576,25\,€}$ b) $11\,576,25/3 = \mathbf{3\,858,75\,€/ano}$ c) o banco cobra juros sobre o saldo *a cada período* (amortização) — o dinheiro tem valor no tempo: receber tudo no fim atrasaria a remuneração do capital emprestado (por isso a prestação constante cobre capital + juros acumulados).

11. a) $300 \times 1,0025^{10} = \mathbf{307,58\,€}$ b) $n = 22$: $300 \times 1,0025^{22} = \mathbf{316,94\,€}$ c) confirma que mais períodos de capitalização = mais juros sobre juros (mesma taxa e mesmo Ci, o valor final só sobe com n e com a frequência — ex. 6).

12. a) $Cf(B) = 2\,000 \times 1,04^2 = 2\,000 \times 1,0816 = \mathbf{2\,163,20\,€}$ b) custo de A = $2\,163,20 - 2\,000 = \mathbf{163,20\,€}$ (zero de remuneração) c) (modelo) escolho **B**: 1) em 2 anos rende 163,20 € sem risco de perda (depósito com garantia) 2) protege o poder de compra contra a inflação (~2%/ano comeriam $\approx 80\,€$) · contra: o dinheiro fica *amarrado* — se surgir uma emergência, resgatar cedo pode custar juros perdidos → por isso o fundo de emergência (opção C) deve vir primeiro com uma parte menor.