

Resumo de Geometria — Sintética, Analítica e Vetorial

10.º Ano Matemática A 2 páginas Tema 4

Objetivo: Consolidar os três «idiomas» da geometria do 10.º ano — a figura (sintética), o número (analítica) e o vetor (espacial) — com as fórmulas, as propriedades-chave e os erros típicos.

1 · Geometria sintética — pontos e retas notáveis

Ponto	Interseção de	Propriedade
Incentro (I)	bissetrizes	equidistante dos lados → circunferência inscrita
Circuncentro (O)	mediatrizes	equidistante dos vértices → circunscrita
Ortocentro (H)	alturas	pé de cada altura ⊥ ao lado oposto
Baricentro (G)	medianas	corta medianas em 2/3 ($AG = 2 \cdot GM$) — centro de massa

Reta de Euler: H, G, O colineares, $OG : GH = 1 : 2$ · **9 pontos:** 3 médios dos lados + 3 pés das alturas + 3 médios de [vértice ; H] — centro no **médio de OH**, raio = $R/2$.
6 triângulos equivalentes: as 3 medianas dividem em 6 de área igual (área = $T/6$) · Equilátero → 4 pontos coincidem · Retângulo → H = vértice reto, O = médio da hipotenusa · Obtusângulo → O, H fora.

2 · Geometria analítica no plano

Distância e médio $d(A,B) = \sqrt{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}$ (Pitágoras) $M = ((x_1+x_2)/2 ; (y_1+y_2)/2)$	Reflexões de P(x, y) $OX \rightarrow (x, -y)$ · $OY \rightarrow (-x, y)$ · meia-volta $\rightarrow (-x, -y)$
Reta reduzida $y = ax + b$ (a = declive, b = corte) geral $Ax + By + C = 0$ · 2 pontos: $a = \Delta y / \Delta x$	⊥ e perpendiculares: $a_2 = -1/a_1$ · paralelas: a iguais $x = k$ (indefinido) · $y = k$ (a = 0)
Semiplanos $Ax + By + C$: testar um ponto — > 0 , = 0 (sobre a reta) ou < 0	Circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ · geral: centro $(-D/2; -E/2)$ $r^2 = D^2/4 + E^2/4 - F$

Mediatriz de AB: passa pelo ponto médio, ⊥ a AB — *locus* dos pontos com $d(P, A) = d(P, B) \rightarrow$ base da circunscrita (2 mediatrizes cruzam-se em O).

3 · Vetores, reta e espaço

Componentes: $AB = B - A$ · **Norma:** $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ · **Unitário:** $v/|v|$ · **Operações:** componente a componente; λv escala sem mudar direção.
Colineares: $u = \lambda v \Rightarrow$ mesma direção $\rightarrow$ qualquer um serve de vetor diretor.

Reta — vetorial: $r = OA + \lambda u$ (ponto + diretor) · **Reduzida:** $(x-x_0)/u = (y-y_0)/v = (z-z_0)/w$ — as três iguais $\Leftrightarrow$ o ponto pertence.
 Distância entre λ_1 e $\lambda_2 = |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot |u|$.

Plano: $ax + by + cz + d = 0$ com normal $n = (a, b, c)$ · por ponto + normal: $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ · distância de P ao plano = $|ax_P + by_P + cz_P + d| / |n|$.
Esfera: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ — casca ($= r^2$), interior ($< r^2$) ou exterior.

4 · Erros típicos (e como evitá-los)

- **Confundir o ponto com a reta:** l equidista dos *lados*, O dos *vértices* — anótico com «l = inscrito» / «O = circunscrito».
- **Baricentro ao contrário:** $AG = 2/3$ da mediana (G mais perto do lado) — não $1/3$.
- **Declive da perpendicular:** inverte E muda o sinal ($-1/a$) — só inverter dá erro.
- **Semiplanos sem teste:** chutar o sinal em vez de substituir um ponto.
- **Reduzida «desligada»:** esquecer um dos três quocientes $\rightarrow$ pertença não testada de verdade.
- **Normal do plano:** são os coeficientes de x, y, z — não o termo independente.
- **Vetores posições:** vetor = destino – origem ($AB = B - A$), nunca $A - B$.
- **λ negativo:** mudança de sentido, não de comprimento — $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$.

5 · Checklist de resolução

Ponto notável?

Identifica a construção (bissetriz/mediatriz/altura/mediana) $\rightarrow$ propriedade $\rightarrow$ caso especial (equilátero, retângulo, obtusângulo).

Reta/plano?

Escolhe a forma: dados ponto+diretor $\rightarrow$ vetorial; coeficientes $\rightarrow$ geral/normal.
 Pertença = substituir.

Círculo/esfera?

Centro + raio primeiro, depois expande. Interseções = substituir a reta na equação.

Vetor/ λ ?

Componentes $\rightarrow$ norma $\rightarrow$ colinearidade. Interpreta λ fisicamente (tempo, escala, posição).

Ligação às fichas: 19 (pontos notáveis) · 20 (analítica) · 21 (vetores e espaço) — refaz os exercícios marcados e confere com as soluções.