

Ficha 20 — Geometria analítica no plano

10.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Usar o referencial cartesiano: calcular distâncias e pontos médios; obter reflexões e meia-volta; determinar equações de retas (geral e reduzida), semiplanos e mediatriz; trabalhar a circunferência (equação reduzida e geral).

Revisão rápida — fórmulas essenciais

Distância: $d(A, B) = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$ · **Ponto médio:** $M = ((x_1 + x_2)/2; (y_1 + y_2)/2)$

Reta: reduzida $y = a \cdot x + b$ (a = declive, b = corte OY) · geral $Ax + By + C = 0$ · por 2 pontos: $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

Verticais/horizontais: $x = k$ (declive indefinido) · $y = k$ ($a = 0$) · **Perpendiculares:** $a_2 = -1/a_1$ (retas l: a iguais).

Semiplanos: em $Ax + By + C$, os pontos dão valor > 0 (um lado), $= 0$ (retá) ou < 0 (outro lado) — basta *testar um ponto*.

Mediatriz de AB: passa pelo ponto médio M , $\perp$ a AB — é o **locus** dos pontos com $d(P, A) = d(P, B)$.

Circunferência: reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ [centro (a, b) , raio r] · geral $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow$ centro $(-D/2; -E/2)$, $r^2 = D^2/4 + E^2/4 - F$.

Reflexões de $P(x, y)$: em OX $\rightarrow (x, -y)$ · em OY $\rightarrow (-x, y)$ · meia-volta pela origem $\rightarrow (-x, -y)$.

Exercícios

1. Distância: a) $A(1, 2)$, $B(4, 6)$: $d = \sqrt{9 + 16} = ______$ b) distância de $C(3, -4)$ à origem $______$ c) que triângulo se esconde em cada cálculo? (relação de Pitágoras — 1 frase)

2. Ponto médio: $A(1, 2)$, $B(4, 6)$: $M = ______$ — e o ponto médio de $(-3, 5)$ e $(3, -5)$: $______$ (que ponto é esse?).

3. Reflexões e meia-volta: $P(3, 5)$: sobre OX $\rightarrow ______$ · sobre OY $\rightarrow ______$ · meia-volta pela origem $\rightarrow ______$ · o que têm em comum os três resultados?

4. Reta por 2 pontos: por $(0, -1)$ e $(3, 5)$: a) $a = \Delta y / \Delta x = ______$ b) $b = ______$ c) reduzida: $y = ______$ d) geral: $______ = 0$.

5. Retas especiais: $x = 4 \rightarrow$ declive $__\cdot y = -2 \rightarrow$ declive $__\cdot$ a reta perpendicular a $y = (2/3)x + 1$ tem declive $__\cdot$

6. Semiplanos: em $r: 2x - y - 1 = 0$: a) valor em $(0, 0) = __\rightarrow$ que lado? b) valor em $(2, 0) = __\cdot$ e $(1, 1)? \rightarrow$ está sobre a reta? $__\cdot$ d) desenha mentalmente: onde fica a expressão > 0 ?

7. Mediatriz analítica: $A(1, 2), B(4, 6)$: a) declive de $AB = __\cdot$ b) declive da mediatriz $= __\cdot$ ($\perp$) c) equação: passa por $M(2,5; 4) \rightarrow y - 4 = -0,75(x - 2,5) \rightarrow$ reduzida: $y = __\cdot$ d) confirma $d(P, A) = d(P, B)$ para $P(6,5; 1)$: $__\cdot = __\cdot$

8. Circunferência: a) centro $(3, -2), r = 5 \rightarrow$ reduzida $__\cdot \rightarrow$ expande: geral $__\cdot = 0$ b) de $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ lê: centro $__\cdot r = __\cdot$ (mesma circunferência?).

9. Reta $\times$ circunferência: $x^2 + y^2 = 25$ com $y = 4$: a) substitui $\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = __\cdot$ b) pontos $__\cdot$ c) distância entre eles: $__\cdot$ — secante, tangente ou externa? $__\cdot$

10. Circunscrita por mediatrizes: A(0, 0), B(6, 0), C(0, 8): a) mediatriz de AB: $x = ______$ b) mediatriz de AC: $y = ______$ c) centro O = $______$ $r = d(O, A) = ______$ — confirma com a hipotenusa BC = $______$ (relação do retângulo).

11. Algoritmo (Python):

```
import math
A=(1,2); B=(4,6)
d=math.dist(A,B)
print(d, ((A[0]+B[0])/2, (A[1]+B[1])/2))
```

a) impresso $______$ b) muda B para (4, -2) → novo d? $______$ — porquê? c) como fazias d «à mão» com a raiz?

12. Plano/esconderijo: duas referências A e B no mapa; quer-se o ponto que fica (1) a igual distância de A e B e (2) a 5 km do ponto médio M. a) que duas construções usas? (mediatriz + ...) b) quantos pontos de solução saem? $______$ c) 2 razões de robustez + 1 fonte de erro real.

Soluções — Ficha 20: Geometria analítica

1. a) $d = \sqrt{[(4-1)^2 + (6-2)^2]} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$ b) $\sqrt{(3^2 + (-4)^2)} = \sqrt{(9+16)} = 5$ c) cada distância é a **hipotenusa** de um retângulo com lados $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$ — a fórmula é Pitágoras no referencial.
2. $M = ((1+4)/2 ; (2+6)/2) = (2,5 ; 4)$ · segundo: $((-3+3)/2 ; (5-5)/2) = (0 ; 0)$ — é a **origem** (os pontos são simétricos pela origem: um é a meia-volta do outro).
3. OX: **(3, -5)** · OY: **(-3, 5)** · meia-volta: **(-3, -5)** — em comum: mesmo par de valores $|x|, |y|$ (todos a mesma distância dos eixos/origem); só *mudam os sinais* das coordenadas refletidas.
4. a) $(5 - (-1))/(3 - 0) = 6/3 = 2$ b) corte OY: **b = -1** (o ponto (0, -1)) c) $y = 2x - 1$ d) $2x - y - 1 = 0$ (ou $2x - y - 1 = 0$ com $A = 2, B = -1, C = -1$).
5. $x = 4$: **indefinido** (vertical, $\Delta x = 0$) · $y = -2$: **0** (horizontal) · perpendicular a $2/3$: $-1/(2/3) = -3/2 = -1,5$ (retas $\perp$ tinham o mesmo a ; $\perp$ inverte e muda o sinal).
6. a) $2 \cdot 0 - 0 - 1 = -1 < 0 \rightarrow$ lado do **valor negativo** b) $4 - 0 - 1 = 3 > 0$ c) $2 - 1 - 1 = 0 \rightarrow$ sim, **(1, 1) está sobre a reta** (é zero, logo nem um nem outro semiplano — pertence à fronteira) d) $Ax + By + C > 0$ corresponde ao meio-plano onde testar *outro* ponto dá positivo — a reta divide o plano em exatamente duas regiões.
7. a) $(6-2)/(4-1) = 4/3$ b) $-1/(4/3) = -3/4 = -0,75$ c) $y = -0,75x + 1,875 + 4 \rightarrow y = -0,75x + 5,875$ (ou $y = -3/4x + 47/8$) d) $P(6,5; 1)$: $d(P,A) = \sqrt{(5,5^2 + 1^2)} = \sqrt{31,25} \approx 5,59$ · $d(P,B) = \sqrt{(2,5^2 + 5^2)} = \sqrt{31,25} \approx 5,59$ — iguais ✓ (a mediatriz garante-o para *todos* os pontos dela).
8. a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25 \rightarrow$ expande: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ b) centro = $(-D/2 ; -E/2) = (3; -2)$ · $r^2 = 9 + 4 + 12 = 25 \rightarrow r = 5 \rightarrow$ **sim, a mesma** circunferência (as duas formas são equivalentes).
9. a) $x^2 + 16 = 25 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$ b) pontos **(3, 4)** e **(-3, 4)** c) distância = **6** — **secante** (corta em 2 pontos; a distância do centro à reta $y = 4$ é $4 < r = 5$).
10. a) AB horizontal sobre $y = 0 \rightarrow$ mediatriz vertical pelo médio (3, 0): **x = 3** b) AC vertical sobre $x = 0 \rightarrow$ mediatriz horizontal pelo médio (0, 4): **y = 4** c) $O = (3, 4)$ · $r = \sqrt{(9+16)} = 5$ · hipotenusa $BC = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10 \rightarrow$ no retângulo, circunscrita tem centro no médio da hipotenusa e $r = 10/2 = 5$ ✓ (confirma a Ficha 19).
11. a) $d = 5,0$, médio = **(2,5, 4,0)** → impresso **5.0 (2.5, 4.0)** b) $\Delta x = 3, \Delta y = -4 \rightarrow d = \sqrt{(9+16)} = 5,0$ **outra vez** — a direção não importa, só as diferenças *ao quadrado* c) $d = \sqrt{[(4-1)^2 + (6-2)^2]} = \sqrt{25} = 5$ (os quadrados anulam os sinais das diferenças).
12. a) (1) **mediatriz** de AB — todos os pontos dela têm $d(P, A) = d(P, B)$ (2) **circunferência de raio 5 km centrada em M** — os pontos dela estão a 5 km de M · solução = interseção das duas figuras b) como M pertence à própria mediatriz, a circunferência corta-a em **2 pontos** (simétricos, a 5 km de M para cada lado da linha AB) c) robustez: (1) a mediatriz é *exata* por construção (depende só de A e B, não da escala) (2) as duas construções são independentes — o cruzamento «confirma-se» visualmente · erro real: imprecisão na leitura das coordenadas de A/B (mapa/GPS) desloca toda a mediatriz.