

# Resumo de Funções — generalidades e transformações

10.º Ano   Matemática A   2 páginas

**Em 2 linhas:** Uma **função** é uma **regra de correspondência** que a cada objeto do domínio associa **exatamente um** elemento do contradomínio. Do cálculo de Leibniz à definição rigorosa de Dirichlet (séc. XIX), passámos de «fórmula» a «regra que liga dois conjuntos» — por isso uma função pode ser fórmula, tabela, gráfico ou pedaços (por ramos).

## 1. Vocabulário indispensável

**Notação:**  $f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$  —  $A$  = **domínio** (todos os objetos possíveis) ·  $B$  = **contradomínio** (onde podem cair as imagens) · **imagen** = subconjunto de  $B$  realmente atingido.

**Objeto (ou argumento):** o valor de **entrada** ( $x$ ). **Imagem:** o valor de saída  **$f(x)$** . Cada objeto  $\rightarrow$  *uma* imagem (unicidade) — vários objetos podem partilhar imagem.

**Domínio vs. imagen:** domínio  $\subseteq$  entradas «válidas» (cuidado com denominadores, raízes pares e *contexto*); imagen = conjunto das saídas obtidas ( $f(\mathbb{R})$  pode ser menor que  $B$ ).

## 2. As três (quatro) representações

- Fórmula/expressão:** regra compacta ( $f(x) = 2x + 1; |x|$ ; por ramos).
- Tabela:** pares  $(x, f(x))$  — bom para dados finitos/experimentais.
- Gráfico:** nuvem/curva no plano — *lê-se* zeros, extremos, monotonia, sinal de relance.
- Verbal/contexto:** «custo de  $y$  € para  $x$  km» — traduz para os outros (competência central: ir e voltar entre as 4).

## 3. Transformações (o gráfico muda, a forma mantém)

| Transformação  | Efeito no gráfico                                                                     | Exemplo (partindo de $y = x^2$ )                  |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $f(x) + b$     | traslação vertical: $b > 0$ sobe, $b < 0$ desce                                       | $x^2 + 3 \rightarrow V(0, 0) \rightarrow (0, 3)$  |
| $f(x - a)$     | traslação horizontal: <b>contraintuitivo</b> — $a > 0$ move para a <i>direita</i>     | $(x - 2)^2 \rightarrow V(0,0) \rightarrow (2, 0)$ |
| $c \cdot f(x)$ | dilatação vertical: $c > 1$ estica, $0 < c < 1$ achata; $c < 0$ inverte a concavidade | $2x^2 \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2)$      |
| $-f(x)$        | reflexão sobre OX (espelho vertical)                                                  | $-x^2 \rightarrow$ parábola invertida             |

Dica:  $f(x - a)$  desloca na *direção oposta* ao sinal que se vê — testa com  $f(2)$ : para ter o valor que antes era de  $x = 2$ , agora  $x$  tem de ser 4.

4. Síntese do tema — as famílias e a sua «caixa de ferramentas»

| Família                                    | Reconhecer por                                 | Calcular/ler                                                                            |
|--------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Afim — $a \cdot x + b$                     | grau 1 $\leftrightarrow$ reta                  | declive $a$ ( $\Delta y/\Delta x$ ), corte $b$ , zero $-b/a$ , monotonia = sinal de $a$ |
| Quadrática — $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ | grau 2 $\leftrightarrow$ parábola              | vértice $(-b/2a)$ , $\Delta = b^2 - 4ac$ (zeros), sinal, extremo, monotonia             |
| Por ramos                                  | regra por intervalo (degraus/mudas de declive) | escolher o ramo certo; fronteiras $\Rightarrow$ continuidade (IRS, faturas)             |
| Módulo — $ x $                             | forma em V, saída $\geq 0$                     | ramos $\pm x$ , distância $ x - a $ , inequações com $\pm$                              |

5. Checklist — analisar qualquer função (5 passos)

- 1. **Domínio:** que  $x$  são válidos (fórmula + contexto)?
- 2. **Zeros e sinal:** onde  $f(x) = 0$ ? onde é +, onde é -?
- 3. **Monotonia:** onde sobe/descende? ( $a$ , vértice, ramos)
- 4. **Extremos e cortes:** vértice/máx./mín., cortes com OX e OY.
- 5. **Representar/ler:** gráfico confirma a análise — e a inversa (do gráfico para a fórmula) também.

Erros clássicos a evitar:

- Confundir **contradomínio com imagen** ( $B$  pode ser maior que o que se atinge).
- Tratar  **$f(x - a)$**  como «para a esquerda» — o sinal engana (ver §3).
- Esquecer o **contexto no domínio** (km negativos, horas  $< 0$ , denominador nulo).
- Na quadrática: usar a **resolvente com  $\Delta < 0$**  (não há raízes reais) ou esquecer o  $2a$ .
- Nos ramos: aplicar a regra errada por **ordem invertida** (IRS).
- Ler o gráfico **invertendo eixos** (dependente vs. independente).
- Extrapolar uma reta/parábola **para fora dos dados**.

**Definição essencial:** «Função é uma correspondência que, de cada objeto do domínio, escolhe exatamente uma imagem — seja qual for a forma como a representamos: fórmula, tabela, gráfico ou pedaços.»