

Ficha 15 — Funções por ramos: escalões do IRS, faturas e módulo

10.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Ler e calcular com funções definidas por ramos; aplicá-las aos escalões do IRS (progressividade) e a faturas com tarifas por degraus; trabalhar a função módulo e as suas inequações.

Revisão rápida — uma regra por intervalo

- Definição por ramos:** $f(x) = \{ \text{regra}_1 \text{ se } x \in I_1; \text{regra}_2 \text{ se } x \in I_2; \dots \}$ — *escolhe-se a regra pelo valor de x* . O gráfico junta pedaços (pode ter «degraus» ou mudas de inclinação).
- IRS progressivo (2025) como função contínua por ramos** — cada ramo já «carrega» o imposto dos escalões anteriores (daí a constante):

$$f_1(x) = 0,1325 \cdot x \quad (x \leq 8\,059) \quad \cdot \quad f_2(x) = 0,165 \cdot x - 261,92 \quad (8\,059 < x \leq 12\,160)$$

$$f_3(x) = 0,22 \cdot x - 930,72 \quad (12\,160 < x \leq 17\,233) \quad \cdot \quad f_4(x) = 0,245 \cdot x - 1\,361,54 \quad (17\,233 < x \leq 22\,306)$$

- Progressividade** = declives crescentes ($0,1325 < 0,165 < 0,22 < 0,245$) com a reta *contínua* (conferir na fronteira!) — o imposto nunca «salta», só acelera.
- Faturas por degraus** (água/eletricidade): fixo + escalões de consumo $\rightarrow$ **declive** = **preço por unidade de cada faixa**.
- Módulo:** $|x| = \{ -x \text{ se } x < 0; x \text{ se } x \geq 0 \}$ — gráfico em V; $|x - a|$ = distância de x a a (sempre ≥ 0).

Exercícios

1. Define função definida por ramos — 2 exemplos reais (além do IRS) e o que se verifica nas fronteiras dos intervalos (continuidade).

2. $f(x) = x^2$ se $x < 1$ · $2x - 1$ se $x \geq 1$: a) $f(-2)$ ___ b) $f(0,5)$ ___ c) $f(1)$ ___ d) $f(3)$ ___ — que ramo usaste em cada caso?

3. Continuidade no IRS: confirma $f_1(8\,059) = f_2(8\,059)$: a) $0,1325 \times 8\,059 =$ ___ b) $0,165 \times 8\,059 - 261,92 =$ ___ c) igual? ___ — porque é que isso é exigível?

4. Calcular com o ramo certo: a) IRS de 10 000 €: ramo ___ $\rightarrow 0,165 \times 10\,000 - 261,92 =$ ___ b) IRS de 15 000 €: ramo ___ $\rightarrow 0,22 \times 15\,000 - 930,72 =$ ___

5. Taxas (ex. 4a): a) taxa efetiva = $1\,388,08/10\,000 =$ ___% (2 casas) b) taxa marginal do ramo = ___% c) porque é que a efetiva < a marginal? (1 frase)

6. Água por degraus: fixo 8 € · até 10 m³: $1,20 \text{ €/m}^3 \cdot 10$ –25 m³: 2,00 € · acima: 3,50 €. a) ramo 2: custo(x) = ___ (para $10 < x \leq 25$) b) conta de 12 m³ ___ c) conta de 30 m³: primeiro o total até 25 = ___ depois + ___ = ___ total d) confirma com o ramo 3: $3,5x - 37,5 =$ ___

7. Módulo: a) $|-7| =$ ___ b) $|3 - 8| =$ ___ c) porque é que $|x|$ nunca é negativa? (1 frase) d) escreve $|x|$ por ramos e desenha o V (mínimo em que ponto?).

8. Equações/inequações com módulo: a) $|2x - 6| = 0 \rightarrow x =$ ___ b) $|x - 4| < 2 \rightarrow$ resolva: $-2 < x - 4 < 2 \rightarrow x \in$ ___ c) $|x - 4| > 5 \rightarrow x$ ___ (fora do intervalo).

9. Progressividade: lê os declives dos ramos do IRS ($0,1325 \rightarrow 0,245$): a) o que acontece com cada € extra à medida que se sobe de escalão? b) descreve o gráfico: contínuo? peças retas? c) se a taxa marginal do teu escalão é 24,5%, ao ganhar 100 € a mais pagas ___ — mas a tua taxa efetiva é menor: porquê?

10. Gráfica: liga cada fórmula ao gráfico: (A) $f(x) = |x + 3|$ (B) $f(x) = 2x$ se $x \leq 5$, depois horizontal a 10 (C) $f(x) = -x^2 + 9$. a) V com ramo negativo ___ b) degrau/retificação ___ c) parábola ___ — e o «ponto de quebra» de A está em que x ? ___

11. Algoritmo (Python):

```
def irs(x):
    if x <= 8059: return 0.1325*x
    if x <= 12160: return 0.165*x - 261.92
    if x <= 17233: return 0.22*x - 930.72
    return 0.245*x - 1361.54
print(round(irs(10000),2), round(irs(15000),2))
```

a) impresso ___ b) $\text{irs}(25000) =$ ___ c) se trocares a ordem das condições ($1.^a = x \leq 12160$), o que acontece a $\text{irs}(10000)$? — porquê? ___

12. Produção: estacionamento: $1.^a \text{ h} = 1 \text{ €}$, cada hora seguinte = 1,50 €, diária (24 h) = 8 €. a) desenha $f(x)$ por ramos ($h = 0-24$) b) calcula 3 h ___ e 6 h ___ c) 2 prós desta tarifa + 1 problema de descontinuidade (salto para a diária: a partir de que h compensa?).

Soluções — Ficha 15: Funções por ramos

1. *Por ramos*: uma regra diferente para cada intervalo do domínio (escolhe-se por onde cai x). Exemplos: IRS escalonado; faturas de água/eletricidade com preço por faixa; tarifas de táxi/tel. Nas **fronteiras** a função deve dar o mesmo valor pelos dois ramos (contínuo) — senão um centímo de diferença saltaria o imposto/fatura.

2. a) $x = -2 < 1 \rightarrow (-2)^2 = 4$ b) $x = 0,5 < 1 \rightarrow 0,25$ c) $x = 1 \geq 1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1$ d) $x = 3 \geq 1 \rightarrow 6 - 1 = 5$ (ramo 2) — sempre: primeiro localiza o intervalo, depois aplica só essa regra.

3. a) **1 067,82 €** b) $1\,329,74 - 261,92 = 1\,067,82$ € c) **iguais ✓** — exigível porque, na fronteira de um escalão, não pode haver «salto»: ganhar 1 € mais não pode disparar (nem anular) o imposto — a função do IRS tem de ser contínua.

4. a) $10\,000 \in (8\,059; 12\,160] \rightarrow$ ramo $f_2 \rightarrow 1\,650 - 261,92 = 1\,388,08$ € b) $15\,000 \in (12\,160; 17\,233] \rightarrow$ ramo $f_3 \rightarrow 3\,300 - 930,72 = 2\,369,28$ €.

5. a) $1\,388,08/10\,000 = 13,88\%$ b) **16,5%** c) a efetiva é a razão *total* (o 1.º escalão entrou com só 13,25%, puxando a média para baixo); a marginal é o que incide sobre o **último** euro do ramo — só chegas a 16,5% se todo o rendimento estivesse nessa taxa (nunca está).

6. a) $8 + 12 + 2(x - 10) = 2x$ (o fixo + a 1.ª faixa ficam embutidos — confirma na fronteira: $2 \cdot 10 = 20 = 8 + 12$ ✓) b) $2 \times 12 = 24$ € c) até 25 m^3 : $8 + 12 + 15 \times 2 = 50$ € · $+3,50 \times 5 = 17,50$ € → total **67,50 €** d) $3,5 \cdot 30 - 37,5 = 105 - 37,5 = 67,50$ € ✓.

7. a) **7** b) **5** c) porque mede *distância ao zero* (nunca negativa) — define-se $-x$ para $x < 0$ justamente para «dobrar» a parte negativa d) $|x| = \{-x \text{ se } x < 0; x \text{ se } x \geq 0\}$ — gráfico em **V** com vértice/mínimo em **(0, 0)**.

8. a) $2x = 6 \rightarrow x = 3$ (único: o módulo é nulo só no zero interno) b) $x - 4 \in (-2, 2) \rightarrow x \in]2; 6[$ c) $x - 4 < -5$ ou $x - 4 > 5 \rightarrow x < -1$ ou $x > 9 \rightarrow]-\infty; -1[\cup]9; +\infty[$.

9. a) cada € extra é taxado **mais** (13,25% → 24,5%) — só a parcela nova, a antiga mantém-se b) sim: **contínua**, feita de peças retas com declives crescentes («rampa que inclina para cima») c) pagas **24,50 €** desse aumento — mas a taxa efetiva é menor porque os primeiros escalões sempre entraram a taxas menores (a média das taxas marginais < a última).

10. a) **(A)** — V com ramo descendente ($x < -3$) b) **(B)** — reta depois horizontal c) **(C)** — parábola · ponto de quebra de A: $x = -3$ (onde $|x+3|$ muda de ramo; vértice do V).

11. a) $\text{irs}(10000) = 1\,388,08$ · $\text{irs}(15000) = 2\,369,28 \rightarrow$ impresso **1388.08 2369.28** b) $0,245 \times 25\,000 - 1\,361,54 = 6\,125 - 1\,361,54 = 4\,763,46$ € c) $\text{irs}(10000)$ seria avaliado pela **primeira condição verdadeira** — em Python os `if` são testados **por ordem**: com $x \leq 12160$ como 1.ª regra, qualquer valor até 12 160 usaria esse ramo (inclusive os 8 059, que deveriam ser taxados a 13,25%) → escalões errados. Por isso as condições vão **do menor para o maior**: a primeira que «apanha» x é sempre o escalão certo.

12. a) $f(x) = 1 + 1,5(x-1)$ para $1 < x \leq 8 \rightarrow 1,5x - 0,5$; 8 € para $x > 8$ (diária) — desenho: rampa de 1 €/h na 1.ª hora, depois inclinação 1,50, com **salto para os 8 €** assim que ultrapassa 8 h b) 3 h: $1 + 1,5 \times 2 = 4$ € · 6 h: $1 + 1,5 \times 5 = 8,50$ € c) prós: 1) paga só o que usa — justo para estadias curtas (3 h só 4 €) 2) teto (diária) dá previsibilidade e evita contas absurdas · problema: **descontinuidade** — a partir de quando compensa a diária? 8,50 € (6 h) > 8 € → já compensaria a partir de ~5,7 h; mas 7 h daria 10 € > 8 €: quem paga 7 h paga mais do que a diária → regra óbvia: oferecer a diária como opção antecipada (não deixar o cliente pagar degraus inúteis).