

Ficha 14 — Função quadrática: parábola, zeros e extremos

10.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Reconhecer $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ e as famílias de parábolas; calcular eixo de simetria e vértice (extremo); aplicar a fórmula resolvente e o Δ para zeros, sinal, monotonia e resolver equações/inequações do 2.º grau.

Revisão rápida — $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a \neq 0$)

- Gráfico = parábola.** $a > 0 \rightarrow$ concavidade para cima (vértice = *mínimo*) · $a < 0 \rightarrow$ para baixo (vértice = *máximo*). $|a|$ grande = parábola mais «estreita» (dilata/comprime a família x^2); c = corte com OY.
- Eixo de simetria:** $x = -b/2a$ · **Vértice:** $(-b/2a ; f(-b/2a))$ — ponto de extremo.
- Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:** $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 zeros reais distintos · $\Delta = 0 \rightarrow$ zero duplo (tangente a OX) · $\Delta < 0 \rightarrow$ nenhum zero real.
- Fórmula resolvente:** $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$.
- Sinal ($a > 0$):** positiva *fora* dos zeros, negativa *entre* eles ($a < 0$ inverte). **Monotonia:** descende até $x = -b/2a$, depois sobe ($a > 0$).
- Transformações:** $f(x - \alpha)$ desloca α para a **direita** · $f(x) + \beta$ desloca β **para cima** · $k \cdot f(x)$ dilata verticalmente ($k > 1$ estica).

f(x)	a	Concavidade	Δ	Zeros
$x^2 - 4$	1	cima (mínimo)	16	± 2
$-x^2 + 2x - 1$	-1	baixo (máximo)	0	$x = 1$ (duplo)
$2x^2 + x + 5$	2	cima (mínimo)	-39	nenhum

Exercícios

1. Define função quadrática e a ligação «grau 2 $\leftrightarrow$ parábola». O que determina a concavidade e o que a família x^2 faz com ela?

2. Em $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$: a) a ___ b) ___ c) ___ b) concavidade ___ extremo ___ c) corte com OY ___

3. Vértice: $f(x) = x^2 - 6x + 5$: a) eixo de simetria ___ b) $f(3) =$ ___ $\rightarrow$ vértice ___ c) extremo é de que tipo? valor? ___

4. Δ e resolvente: $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$: a) $\Delta = 25 - 16 =$ ___ b) zeros: $(5 \pm 3)/4 \rightarrow x$ ___ e x ___ c) nº de zeros e razão ___

5. Sinal: com os zeros 0,5 e 2 ($a = 2 > 0$): $f > 0$ para x ___ e $f < 0$ para x ___ — escreve em intervalos e confirma com $f(1) =$ ___.

6. $\Delta = 0$: $f(x) = x^2 - 4x + 4$: a) $\Delta =$ ___ b) zero ___ c) descreve o gráfico nesse ponto (tangência) d) fatores: $f(x) =$ ___

7. $\Delta < 0$: $f(x) = x^2 + 2x + 5$: a) $\Delta =$ ___ $\rightarrow$ zeros ___ b) o que se pode afirmar do sinal de f para todo x ? — prova com completamento de quadrados: $(x+1)^2 + 4 \geq$ ___

8. Monotonia: no ex. 3: a) para $x < 3$: f é ___ b) para $x > 3$: ___ c) generaliza: com $a > 0$, onde é decrescente? ___ crescente? ___

9. Equação e inequação: $x^2 - 5x + 6 \geq 0$: a) zeros: resolvente $\rightarrow$ ___ e ___ b) conjunto-solução da inequação ___ c) e se fosse ≤ 0 ? ___

10. Transformações: partindo de $y = x^2$: a) $(x - 2)^2 + 3 \rightarrow$ vértice passa de (0,0) para __ (deslocação __) b) $2x^2 \rightarrow$ o ponto (1,1) vai para __ c) $-x^2$: efeito na concavidade __

11. Algoritmo (Python):

```
import math
a,b,c=1,-5,6
d=b*b-4*a*c
x1=(-b-math.sqrt(d))/(2*a)
x2=(-b+math.sqrt(d))/(2*a)
print(x1,x2)
```

a) impresso __ b) muda c para 7 $\rightarrow$ o que acontece ao correr? (que Δ ?) __ c) e se a = 0? __ (porque falha a fórmula)

12. Modelo quadrático (lançamento): $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ (metros, segundos): a) vértice: $t = 20/10 = __ \rightarrow h = __ \text{ m}$ (altura máx) b) zeros: $\Delta = 420 \rightarrow t = (20 + 20,49)/10 \approx __ \text{ s}$ (descarta o negativo) c) descreve a monotonia: sobe até __ s e desce até __ s — 2 frases.

Soluções — Ficha 14: Função quadrática

1. *Função quadrática*: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ — grau 2 $\leftrightarrow$ gráfico **parábola**. A **concavidade** é dada pelo sinal de a (cima/baixo) e $|a|$ controla a abertura; a família x^2 é a parábola «de referência» — os restantes modelos obtêm-se por *traslações* ($f(x-\alpha)+\beta$) e *dilatações* ($k \cdot x^2$).

2. a) $a = -2 \cdot b = 4 \cdot c = -1$ b) $a < 0 \rightarrow$ concavidade **para baixo**; vértice é um **máximo** c) corte OY: $(0, c) = (0, -1)$.

3. a) $x = -b/2a = 6/2 = x = 3$ b) $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4 \rightarrow$ vértice **(3, -4)** c) $a > 0 \rightarrow$ **mínimo**, valor **-4**.

4. a) $\Delta = 9$ (> 0) b) $(5+3)/4 = 2 \cdot (5-3)/4 = 0,5$ c) **2 zeros reais** — porque $\Delta > 0$ (verifica: $2 \cdot 4 - 10 + 2 = 0 \checkmark$; $0,5 - 2,5 + 2 = 0 \checkmark$).

5. com $a > 0$: $f > 0$ para $x \in]-\infty; 0,5[$ u $]2; +\infty[$ · $f < 0$ para $x \in]0,5; 2[$ · confirmação: $f(1) = 2 - 5 + 2 = -1 < 0 \checkmark$ (1 está entre os zeros).

6. a) $\Delta = 16 - 16 = 0$ b) $x = 4/2 = 2$ (duplo) c) a parábola toca OX em $(2, 0)$ — **tangente**, sem cortar d) $f(x) = (x - 2)^2$ (quadrado perfeito).

7. a) $\Delta = 4 - 20 = -16 \rightarrow$ **nenhum zero real** b) com $a > 0$ e sem cortes, f é **sempre positiva**: $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 \geq 4 > 0$ para todo x .

8. a) **decrecente** b) **crescente** c) com $a > 0$: decrescente em $]-\infty; -b/2a[$ e crescente em $]-b/2a; +\infty[$ (com $a < 0$ inverte-se).

9. a) $(5 \pm \sqrt{(25 - 24)})/2 = (5 \pm 1)/2 \rightarrow x = 3$ e $x = 2$ b) $a > 0 \rightarrow \geq 0$ fora dos zeros: $]-\infty; 2]$ u $[3; +\infty[$ c) $\leq 0 \rightarrow$ entre os zeros (inclusive): **[2; 3]**.

10. a) vértice $\rightarrow (2, 3)$: $(x-2)$ move 2 para a **direita**, $+3$ move 3 **para cima** b) $2 \cdot 1^2 = 2 \rightarrow$ ponto $(1, 2)$ — dilata vertical $\times 2$ c) concavidade **inverte** (cima $\rightarrow$ baixo; extremo mínimo vira máximo).

11. a) $d = 25 - 24 = 1 \rightarrow x_1 = (5-1)/2 = 2,0 \cdot x_2 = (5+1)/2 = 3,0 \rightarrow$ impresso **2.0 3.0** b) $c = 7 \rightarrow d = 25 - 28 = -3 \rightarrow \text{math.sqrt}(-3)$ levanta **ValueError** — traduz o « $\Delta < 0 \rightarrow$ sem zeros reais» c) $a = 0$: $(2 \cdot a) = 0 \rightarrow$ **ZeroDivisionError** e a equação deixa de ser do 2.º grau (ficaria $-5x + 6 = 0$, de 1.º grau, com outro método).

12. a) $t = 20/10 = 2$ s $\rightarrow h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$ m b) zeros: $(20 \pm \sqrt{420})/10 \rightarrow (20 + 20,49)/10 \approx 4,05$ s (a outra raiz $\approx -0,05$ s é antes do lançamento $\rightarrow$ descarta-se) c) $a < 0 \rightarrow$ sobe do lançamento até **2 s** (vértice/máximo 21 m) e desce de 2 s até tocar o chão em $\approx 4,05$ s — monotonia decrescente após o vértice; antes, crescente.